Στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών μήτρας (ΣΜΓ)

Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας

Επαυξημένη μήτρα

Ορισμός:

Επαυξημένη (augmented matrix) ονομάζεται η μήτρα που περιέχει τα στοιχεία της μήτρας των συντελεστών συν αυτή των σταθερών όρων, π.χ. για ένα σύστημα A · X = b γραμμικών εξισώσεων m x n:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{bmatrix}$$

μήτρα συντελεστών

μήτρα σταθερών

Αυτό που μας παρέχει η επαυξημένη μήτρα είναι μια ολοκληρωμένη παρουσίαση ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων, για τις γραμμές & στήλες του, τις μεταβλητές και τους σταθερούς όρους του

Παράδειγμα

Ποια είναι η επαυξημένη μήτρα του παρακάτω συστήματος γραμμικών εξισώσεων:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 &= 3 \end{aligned}$$

Είναι η μήτρα:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Τι είναι οι ΣΜΓ μήτρας

Έστω A_{mxn}, ονομάζουμε ΣΜΓ (ή γραμμοπράξεις) οποιαδήποτε από τις επόμενες πράξεις στις γραμμές R_i της μήτρας:

Γραμμοπράξη	**Συμβολισμός**
1. Πολλαπλασιάζω την R_i με μία σταθερά κ	$R_i \longrightarrow \kappa \cdot R_i$
2. Εναλλάσσω την R_i με την R_j	$R_i \leftrightarrow R_j$
3. Προσθέτω στην R_j λ φορές την R_i	$R_j \longrightarrow R_j + \lambda \cdot R_i$

Γραμμοϊσοδύναμη μήτρα της A_{mxn} λέγεται η μήτρα B_{mxn} που έχει δημιουργηθεί μέσα από μία πεπερασμένη σειρά γραμμοπράξεων (συμβολ. $A \sim B$)

Στοιχειώδης μήτρα λέγεται μία γραμμοϊσοδύναμη της I_n

Παραδείγματα

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to 3 \cdot R_1} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ η οποία είναι και <u>στοιχειώδης μήτρα</u> (από την I_2)

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Παρατήρηση: Κάθε γραμμοϊσοδύναμη μήτρα μπορεί να αποδοθεί επίσης αν πολλαπλασιάσουμε από τα αριστερά, την αρχική μήτρα με την αντίστοιχη στοιχειώδη

(δηλ. κάνουμε τις ίδιες γραμμοπράξεις στην μοναδιαία μήτρα και την στοιχειώδη που βρίσκουμε την πολλαπλασιάζουμε από αριστερά με την μήτρα)

Γιατί να χρησιμοποιώ ΣΜΓ;

Γιατί με τις ΣΜΓ σε ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων καταλήγουμε σε ένα άλλο ισοδύναμο, δηλ. οι λύσεις του είναι οι ίδιες με το αρχικό

Ασκήσεις

Λύστε τα επόμενα γραμμικά συστήματα με ΣΜΓ

$$\begin{cases} x - 3y = 4 \\ -2x + 6y = -8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3y = 4 \\ -2x + 6y = 5 \end{cases}$$

Πώς λύνω;

Προσπαθώ μέσα από ΣΜΓ να φτάσω από την αρχική επαυξημένη μήτρα σε μία ίδιας τάξης όπου:

1. είτε την μετασχηματίζω σε άνω τριγωνική (δηλ. $\alpha_{ij} = 0$ για κάθε $i > j$)
   “μέθοδος απαλοιφή του Gauss”
   (Gaussian Elimination)
2. στην θέση της μήτρας των συντελεστών έχω ανοιγμένη κλιμακωτή* μήτρα
   “μέθοδος απαλοιφής Gauss – Jordan”

* βλ. επόμενο ορισμό

Άσκηση

Λύστε το γραμμικό σύστημα εξισώσεων

$$\begin{aligned} x - 3y - 2z &= 6 \\ 2x - 4y - 3z &= 8 \\ -3x + 6y + 8z &= -5 \end{aligned}$$

Λύση

$$\begin{aligned} x - 3y - 2z &= 6 \\ 2x - 4y - 3z &= 8 \\ -3x + 6y + 8z &= -5 \end{aligned}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned} x - 3y - 2z &= 6 \\ 2y + z &= -4 \\ -3y + 2z &= 13 \end{aligned}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned} x - 3y - 2z &= 6 \\ 2y + z &= -4 \\ 7z &= 14 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad x = 1, \quad y = -3, \quad z = 2$$

Βρείτε ποιοι στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών έχουν γίνει:

Άσκηση

Σας δίνεται η επόμενη μήτρα (επαυξημένη)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Ποιο είναι το γραμμικό σύστημα εξισώσεων που αφορά;
2. Ποια είναι η λύση του;

Υπόδειξη: Προσπαθήστε να έχετε την μοναδιαία μήτρα στην θέση της μήτρας των συντελεστών

(λύση: x=1, y=2, z=3)

Λύση

Το σύστημα γραμμικών εξισώσεων είναι;

$$x + y + 2z = 9$$
$$2x + 4y - 3z = 1$$
$$3x + 6y - 5z = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Προσθέτουμε -2 φορές την πρώτη γραμμή στη δεύτερη και παίρνουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Προσθέτουμε -3 φορές την πρώτη γραμμή στην τρίτη και παίρνουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη γραμμή με 1/2 και παίρνουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

Προσθέτουμε -3 φορές τη δεύτερη εξίσωση στην τρίτη και παίρνουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε την τρίτη γραμμή με -2 και παίρνουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Προσθέτουμε -1 φορά τη δεύτερη γραμμή στην πρώτη και παίρνουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Προσθέτουμε $-\frac{11}{2}$ φορές την τρίτη γραμμή στην πρώτη και $\frac{7}{2}$ φορές την τρίτη γραμμή στην δεύτερη και παίρνουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Δ. Δριβαλιάρης: Συστήματα γραμμικών εξισώσεων και πίνακες, Σημειώσεις Γραμμικής Άλγεβρας

Άσκηση

Με την μέθοδο απαλοιφής του Gauss να δείξετε ότι το σύστημα γραμμικών εξισώσεων δεν έχει λύση

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - \ \ 2x_3 + \ \ 5x_4 &= 4 \\ 2x_1 + 8x_2 - \ \ \ x_3 + \ \ 9x_4 &= 9 \\ 3x_1 + 5x_2 - 12x_3 + 17x_4 &= 7 \end{aligned}$$

Λύση

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= 4 \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 + 9x_4 &= 9 \\ 3x_1 + 5x_2 - 12x_3 + 17x_4 &= 7 \end{aligned}$$

$\xrightarrow[R_3 \to -3R_1+R_3]{R_2 \to -2R_1+R_2}$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= 4 \\ 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 1 \\ -4x_2 - 6x_3 + 2x_4 &= -5 \end{aligned}$$

$\xrightarrow{R_3 \to 2R_1+R_3}$

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = -3$$

Άρα το σύστημα είναι αδύνατο

Κλιμακωτή μήτρα

Κλιμακωτή μήτρα M_{mxn} (echelon form matrix) λέγεται αν:

1. οι μηδενικές γραμμές βρίσκονται κάτω από τις μη - μηδενικές
2. το 1^o στοιχείο κάθε μη – μηδενικής γραμμής βρίσκεται σε στήλη δεξιότερα του $1^{ου}$ μη -μηδενικού στοιχείου της προηγούμενης γραμμής

$$\pi.\chi. \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- Το πρώτο στοιχείο κάθε μη – μηδενικής γραμμής λέγεται ‘Ηγετικό στοιχείο’
- Αν τα ηγετικά στοιχεία μίας κλιμακωτής μήτρας είναι ίσα με την μονάδα, στην οποία στήλη τα υπόλοιπα στοιχεία είναι μηδενικά, τότε η μήτρα λέγεται ‘Ανοιγμένη κλιμακωτή’

Παραδείγματα

- Κλιμακωτές μήτρες: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- Ανοιγμένες κλιμακωτές μήτρες $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Άσκηση

1. Γιατί οι επόμενες μήτρες δεν είναι κλιμακωτές;

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Γιατί οι επόμενες μήτρες δεν είναι ανοικτές κλιμακωτές;

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Θεώρημα μετατροπής μήτρας σε ανοιγμένη κλιμακωτή

Κάθε μήτρα μπορεί να μετατραπεί σε «ανοιγμένη κλιμακωτή» (άρα και κλιμακωτή) μετά από πεπερασμένο πλήθος στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών (γραμμοπράξεων)

Κλιμακωτή & Ανοικτή μέσω ΣΜΓ

(Μέθοδος)

1. Βρίσκετε την $1^{η}$ από αριστερά μη-μηδενική στήλη
2. Αν χρειάζεται, εναλλάξτε την $1^{η}$ σειρά με κάποια άλλη ώστε το $1^{ο}$ στοιχείο της στήλης στο (1) να είναι ≠ 0 (αν υπάρχει 1 προτιμήστε το)
3. Αν το $1^{ο}$ στοιχείο αυτής της στήλης στο (1) είναι Χ, πολλαπλασιάστε την $1^{η}$ γραμμή με 1/Χ (ώστε το $1^{ο}$ στοιχείο να είναι 1)
4. Επιλέξτε προσθαφαιρέσεις στις επόμενες γραμμές, με πολλαπλάσιο της $1^{ης}$ γραμμής, έ.ώ. να μηδενιστούν όλα τα στοιχεία κάτω από το 1
5. Μετά ξεχάστε την ύπαρξη της $1^{ης}$ γραμμής και επαναλάβετε ανάλογα τα βήματα για τον πίνακα που μένει
6. Συνεχίστε έτσι ώστε να φέρετε τον αρχικό πίνακα σε κλιμακωτή μορφή.
7. Για **Ανοιγμένη Κλιμακωτή** προσθαφαιρώ τα πολλαπλάσια των γραμμών με ηγετικά στοιχεία το 1 ώστε να εξαλείψω αν υπάρχουν τα μη μηδενικά στοιχεία των στηλών τους (Gauss – Jordan απαλοιφή)

Παράδειγμα μετατροπής σε κλιμακωτή

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Για ανοικτή κλιμακωτή θα προσθέσω στην 1η γραμμή (5*2η) & ανάλογα για τα στοιχεία της προτελευταίας στήλης

Άσκηση:
Σύμφωνα με την μέθοδο βρείτε τα βήματα των ΣΜΓ που έγιναν

σελ. 30-32: Anton, H. & Ropres, C. (2010), Elementary Linear Algebra, John Wiley & Sons

Άσκηση

Να λύσετε το επόμενο σύστημα γραμμικών εξισώσεων με ΣΜΓ (μέθοδος απαλοιφής Gauss) φέροντας τον επαυξημένο πίνακα σε μορφή κλιμακωτής μήτρας

$$
\begin{aligned}
x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 &= 10 \\
2x_1 - 4x_2 + 8x_3 + 3x_4 + 10x_5 &= 7 \\
3x_1 - 6x_2 + 10x_3 + 6x_4 + 5x_5 &= 27
\end{aligned}
$$

Λύση

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 2 & -4 & 8 & 3 & 10 & 7 \\ 3 & -6 & 10 & 6 & 5 & 27 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 8 & -13 \\ 3 & -6 & 10 & 6 & 5 & 27 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 8 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 8 & -13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = 5 + 2s - 3t$$
$$x_2 = s$$
$$x_3 = -3 - 2t$$
$$x_4 = 7 + 4t$$
$$x_5 = t$$

βλ. βιβλίο σελ. 632

Άσκηση

Να λύσετε το επόμενο σύστημα γραμμικών εξισώσεων με ΣΜΓ φέροντας τον επαυξημένο πίνακα σε μορφή ανοικτής κλιμακωτής μήτρας

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 12 \\
x_1 + 2x_2 \qquad\qquad + 5x_4 &= 17 \\
3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 &= 31
\end{aligned}
$$

Λύση

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ 1 & 2 & 0 & 5 & 17 \\ 3 & 2 & 4 & -1 & 31 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-1)R_1 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & -1 & 31 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-3)R_1 + R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1)R_2 + R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-1)R_2 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} x_1 \quad + 2x_3 - 3x_4 &= 7 \\ x_2 - \quad x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

$x_3 = s \quad \text{και} \quad x_4 = t$

$$x_1 = 7 - 2s + 3t$$

$$x_2 = 5 + \quad s - 4t$$

βλ. βιβλίο σελ. 637

Θεώρημα αντιστρεψιμότητας

Μία τετραγωνική μήτρα A_m είναι αντιστρέψιμη αν και μόνο αν A_m γραμμοϊσοδύναμη με την I_m

αν και μόνο αν : $\Leftrightarrow$

Εύρεση της A^{-1} μέσω ΣΜΓ

1. Δημιουργώ μία μήτρα που περιέχει και την A_m και την I_m
2. Κάνω γραμμοπράξεις έως ότου στην θέση της A_m έχω την I_m
3. Η μήτρα που υπάρχει στην θέση της I_m είναι η A^{-1}

ΠΡΟΣΟΧΗ

Αν στην αριστερή πλευρά εμφανιστεί γραμμή με μηδενικά στοιχεία, τότε η A_m δεν είναι αντιστρέψιμη

Παράδειγμα

Έστω η μήτρα $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ Δημιουργώ την $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 6 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 3R_1}$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 11 & 2 & -3 & 0 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3-2R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1+2R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 -5R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 11 & -9 \end{array}\right)$$

Το δεξί μέρος είναι η A^{-1}

Άσκηση:
Πώς μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι είναι πράγματι αυτή;

βλ. βιβλίο σελ. 659