Άσκηση

Δίνεται το σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & z & = & 1 \\ 3x & - & 5y & + & 5z & = & 4 \\ 2x & - & 6y & + & \lambda z & = & \mu \end{array}$$

(α) Θέσατε $\lambda = 2$ και $\mu = 4$ και λύστε το σύστημα.

(β) Βρείτε τις τιμές των λ και μ ώστε το σύστημα αυτό

(i) να είναι αδύνατο

(ii) να έχει άπειρες λύσεις

(iii) να έχει ακριβώς μια λύση.

Λύση

Εφαρμόζοντας διαδοχικά τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς

$r_2 \to r_2 - 3r_1, r_3 \to r_3 - 2r_1, r_3 \to r_3 + 2r_2$, βρίσκουμε ότι το σύστημα παίρνει την τριγωνική μορφή

$$\begin{array}{l} x - 2y \quad + z \quad = 1 \\ \quad\; y \quad + 2z \quad = 1 \\ \quad\quad (\lambda + 2)z = \mu \end{array}.$$

Από αυτή συμπεραίνουμε τα εξής.

(α) Έστω $\lambda = 2, \mu = 4.$ Τότε από την τελευταία εξίσωση βρίσκουμε $z = 1,$ από τη δεύτερη $y = 1 - 2z = -1$ και από την πρώτη $x = 1 + 2y - z = -2.$ Άρα υπάρχει μοναδική λύση, η $(-2, -1, 1)$.

(β)

(i) Παρατηρούμε από την τελευταία γραμμή ότι αν $\lambda = -2$ και $\mu \neq 0$, τότε δεν υπάρχουν λύσεις.

(ii) Αν $\lambda = -2$ και $\mu =$ 0, τότε το σύστημα είναι

$$\begin{array}{l} x - 2y \quad + z \quad = 1 \\ \quad\; y \quad + 2z \quad = 1 \\ \quad\quad\quad\quad 0 \quad = 0. \end{array}$$

Έχουμε $y = 1 - 2z, x = 1 + 2y - z = 1 + 2(1 - 2z) - z = 3 - 5z.$ Άρα υπάρχουν άπειρες λύσεις, οι $(3 - 5z, 1 - 2z, z), z \in \mathbb{R}$.

(iii) Έστω ότι $\lambda \neq -2$. Από την τελευταία εξίσωση έχουμε $z = \dfrac{\mu}{\lambda+2}$, οπότε από τη δεύτερη παίρνουμε $y = 1-2z = 1-2\dfrac{\mu}{\lambda+2} = \dfrac{\lambda-2\mu+2}{\lambda+2}$ και από την πρώτη $x = 1+2y-z = 1+2\dfrac{\lambda-2\mu+2}{\lambda+2} - \dfrac{\mu}{\lambda+2} = \dfrac{3\lambda-5\mu+6}{\lambda+2}$. Δηλαδή υπάρχει μοναδική λύση, η $\left(\dfrac{3\lambda-5\mu+6}{\lambda+2}, \dfrac{\lambda-2\mu+2}{\lambda+2}, \dfrac{\mu}{\lambda+2}\right)$.

Άσκηση

Υπολογίστε την ορίζουσα $\det\begin{pmatrix} x & y & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{pmatrix}$

(ο πίνακας είναι $n \times n$, όπου $n > 1$).

Λύση

Αναπτύσσοντας ως προς την πρώτη στήλη έχουμε

$$\det\begin{pmatrix} x & y & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{pmatrix} =$$

$$x\det\begin{pmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{pmatrix} + (-1)^{n+1} y \det\begin{pmatrix} y & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \end{pmatrix}$$

$$= x^n + (-1)^{n+1} y^n,$$

γιατί οι δύο τελευταίοι πίνακες είναι $(n-1)\times(n-1)$ τριγωνικοί

Άσκηση 1

Υπολογίστε τις παρακάτω ορίζουσες

$$\det\begin{pmatrix} 2+3i & i \\ 4-i & -3 \end{pmatrix},\quad \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix},\quad \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 23 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix},\quad \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Λύση

Για την πρώτη ορίζουσα έχουμε

$$\det\begin{pmatrix} 2+3i & i \\ 4-i & -3 \end{pmatrix} = (2+3i)\cdot(-3) - i\cdot(4-i) = -6-9i-4i+i^2 = -7-13i.$$

Υπολογίζουμε τη δεύτερη ορίζουσα χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα ως προς την πρώτη γραμμή

Έχουμε $$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 1\det\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + 3\det\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= 1(2-15) - 2(-4-6) + 3(20+4) = 79.$$

Υπολογίζουμε την τρίτη ορίζουσα χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα ως προς την πρώτη στήλη (γιατί περιέχει μηδενικά που απλουστεύουν τις πράξεις). Έχουμε

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 23 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} = 2\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} + 0\det\begin{pmatrix} 1 & 23 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} + 0\det\begin{pmatrix} 1 & 23 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 2\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = -20.$$

Για την τέταρτη ορίζουσα παρατηρούμε ότι δυο στήλες είναι ίσες. Άρα η ορίζουσα είναι ίση με μηδέν

Άσκηση

Για τις διάφορες τιμές του $k \in \mathbb{R}$, να λυθεί το παρακάτω σύστημα.

$$\begin{aligned} x - 2y + kz &= 1 \\ 2x - y + 2z &= 2 \\ 3x - y + 3kz &= 3 \end{aligned}$$

Λύση

Μετά από τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς

$$r_2 \to r_2 - 2r_1, r_3 \to r_3 - 3r_1, r_2 \to \frac{1}{3}r_2, r_3 \to r_3 - 7r_2, r_3 \to \frac{3}{10}r_3$$

φθάνουμε στο τριγωνικό σύστημα

$$\begin{aligned} x \quad - 2y \quad + kz \quad &= 1 \\ y \quad + \frac{2-2k}{3}z &= 0 \\ (-1+k)z &= 0. \end{aligned}$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις βασιζόμενοι στην παράσταση $-1+k$ της τελευταίας εξίσωσης.

1. Έστω $k \neq 1$. Τότε από την τελευταία εξίσωση έχουμε $z = 0$, από τη δεύτερη $y = 0$ και από την πρώτη $x = 1$. Άρα έχουμε μοναδική λύση, την (0,0,0).
2. Έστω $k = 1$. Τότε το τριγωνικό σύστημα είναι το

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 1 \\ y \qquad &= 0 \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Άρα $y = 0$ και $x = 1 + 2y - z = 1 - z$, ενώ το z παίρνει αυθαίρετες τιμές.

Δηλαδή έχουμε άπειρες λύσεις, τις $(1-z, 0, z)$, $z \in \mathbb{R}$.

Άσκηση

Να λυθεί το επόμενο σύστημα για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$.

$$2x - ay + z = 1$$

$$x - y + z = a$$

$$3x - y - z = 2.$$

Λύση

Χρησιμοποιούμε στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών στον επαυξημένο πίνακα.

$$\begin{pmatrix} 2 & -a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & a \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \to r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ 2 & -a & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 - 2r_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & -a+2 & -1 & 1-2a \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & -a+2 & -1 & 1-2a \\ 0 & 2 & -4 & 2-3a \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & 2 & -4 & 2-3a \\ 0 & -a+2 & -1 & 1-2a \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to \frac{1}{2} r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -2 & \dfrac{2-3a}{2} \\ 0 & -a+2 & -1 & 1-2a \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 + (a-2) r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -2 & \dfrac{2-3a}{2} \\ 0 & 0 & -2a+3 & -\dfrac{3}{2}a^2 + 2a - 1 \end{pmatrix}.$$

1η περίπτωση. Έστω $-2a+3 \neq 0$.

Λύνουμε με διαδοχικές αντικαταστάσεις το σύστημα που αντιστοιχεί στον τελευταίο πίνακα. Από την τελευταία γραμμή έχουμε $z = \dfrac{-\dfrac{3}{2}a^2 + 2a - 1}{-2a+3} = \dfrac{3a^2 - 4a + 2}{4a - 6}$.

Αντικαθιστώντας στη δεύτερη γραμμή έχουμε

$y - 2z = \dfrac{2-3a}{2} \Rightarrow y - 2\dfrac{3a^2 - 4a + 2}{4a-6} = \dfrac{2-3a}{2} \Rightarrow y = \dfrac{5a-2}{4a-6}$. Αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση $x - y + z = a$ βρίσκουμε μετά από μερικές πράξεις $x = \dfrac{a^2 + 3a - 4}{4a - 6}$.

Συνεπώς υπάρχει μοναδική λύση $(x, y, z) = \left(\dfrac{a^2 + 3a - 4}{4a-6}, \dfrac{5a-2}{4a-6}, \dfrac{3a^2 - 4a + 2}{4a-6} \right)$.

2^{η} *περίπτωση*. Έστω $-2a+3=0$.

Τότε $-\dfrac{3}{2}a^2+2a-1\neq 0$ (μάλιστα για κάθε πραγματικό a έχουμε $-\dfrac{3}{2}a^2+2a-1\neq 0$ αφού η διακρίνουσα είναι αρνητική). Από την τρίτη γραμμή, που είναι της μορφής $0\quad 0\quad 0\quad c$, όπου $c\neq 0$, συμπεραίνουμε ότι το σύστημα είναι αδύνατο.

Άσκηση

Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{aligned} 3y+2z&=1\\ x+2y+z&=0\\ 2x+7y+4z&=2. \end{aligned}$$

Λύση

Επειδή δεν υπάρχει x στην πρώτη εξίσωση, θα φέρουμε τη δεύτερη εξίσωση στην πρώτη θέση. Επειδή ο σκοπός είναι να φθάσουμε σε ένα τριγωνικό σύστημα, θα φέρουμε την εξίσωση που δεν έχει x στην τελευταία θέση. Μετά εφαρμόζουμε τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss.

$$\begin{cases} 3y+2z=1\\ x+2y+z=0\\ 2x+7y+4z=2 \end{cases} \xrightarrow{r_1\to r_2} \begin{cases} x+2y+z=0\\ 3y+2z=1\\ 2x+7y+4z=2 \end{cases} \xrightarrow{r_2\to r_3}$$

$$\begin{cases} x+2y+z=0\\ 2x+7y+4z=2\\ 3y+2z=1 \end{cases} \xrightarrow{r_2\to r_2-2r_1} \begin{cases} x+2y+z=0\\ 3y+2z=2\\ 3y+2z=1 \end{cases} \xrightarrow{r_3\to r_3-r_2}$$

$$\begin{cases} x+2y+z=0\\ 3y+2z=2\\ 0=-1. \end{cases}$$

Από την τελευταία εξίσωση βλέπουμε ότι το σύστημα είναι αδύνατο.

Άσκηση

Να εξεταστεί για ποιες τιμές των $a,b\in\mathbb{R}$ *το σύστημα*

$$\begin{aligned} x+y+az&=1\\ -2x-y+z&=b\\ x-y+2y&=a \end{aligned}$$

έχει μοναδική λύση, άπειρες λύσεις, καμιά λύση.

Λύση

Μετά από τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών

$r_2\to r_2+2r_1, r_3\to r_3-r_1, r_3\to r_3+2r_2$, ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος παίρνει

τη μορφή

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1\\ 0 & 1 & 2a+1 & b+2\\ 0 & 0 & 3a+4 & a+2b+3 \end{pmatrix}.$$

1η περίπτωση. Έστω $3a+4\neq 0$.

Τότε βλέπουμε ότι υπάρχει μοναδική λύση.

2η περίπτωση. Έστω $3a+4=0$.

- Υποπερίπτωση α. Αν $a+2b+3\neq 0$, τότε το σύστημα είναι αδύνατο.
- Υποπερίπτωση β. Αν $a+2b+3=0$, τότε υπάρχουν άπειρες λύσεις.

Συνοψίζοντας, το σύστημα

- έχει μοναδική λύση αν $a\neq -\frac{4}{3}$,
- έχει άπειρες λύσεις αν $a=-\frac{4}{3}, b=-\frac{5}{6}$
- είναι αδύνατο αν $a=-\frac{4}{3}, b\neq -\frac{5}{6}$.

Άσκηση

Να βρεθεί ένας ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας που είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Λύση

1. Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο μετασχηματισμού ενός πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή έχουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4 \to r_4 + 2r_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4 \to r_4 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4 \to \frac{1}{3} r_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 + r_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 + r_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \to r_1 - r_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας και είναι βέβαια γραμμοϊσοδύναμος με τον αρχικό.

Άσκηση

Να βρεθεί αν υπάρχει ο αντίστροφος του $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 4\end{pmatrix}$.

Λύση

Επειδή ισχύει $\det A=-2\neq 0$, ο A είναι αντιστρέψιμος

$$A_{11}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 4\end{pmatrix},\ A_{12}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix},\ A_{13}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix},$$

$$A_{21}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix},\ A_{22}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 4\end{pmatrix},\ A_{23}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix},$$

$$A_{31}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ A_{32}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix},\ A_{33}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$$ Βρίσκουμε

$$\det A_{11}=4,\ \det A_{12}=8,\ \det A_{13}=6,$$
$$\det A_{21}=3,\ \det A_{22}=4,\ \det A_{23}=3,$$
$$\det A_{31}=1,\ \det A_{32}=2,\ \det A_{33}=1.$$

Συνεπώς $A^{-1}=\dfrac{1}{-2}\begin{pmatrix}4 & -3 & 1\\ -8 & 4 & -2\\ 6 & -3 & 1\end{pmatrix}$.

Άσκηση

Θεωρούμε το σύστημα
$$\begin{aligned} x+y+az &= a^2 \\ x+ay+z &= a \\ ax+y+z &= 1 \end{aligned}$$

όπου $a \in \mathbb{R}$. Να λυθεί το σύστημα αυτό για τις διάφορες τιμές του a.

Λύση

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a^2 \\ 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Μετά από τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς $r_2 \to r_2 - r_1, r_3 \to r_3 - ar_1, r_3 \to r_3 + r_2$, ο πίνακας παίρνει τη μορφή
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-a^2 \\ 0 & 0 & (1-a)(2+a) & (1-a)(1+a)^2 \end{pmatrix}$$

Το αντίστοιχο σύστημα είναι
$$\begin{cases} x + \quad y + \quad az = a^2 \\ \quad (a-1)y + \quad (1-a)z = a-a^2 \\ \quad\quad (1-a)(2+a)z = (1-a)(1+a)^2 \end{cases}$$

- *Περίπτωση 1.* Έστω $(a-1)(a+2) \neq 0$.

  Τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση. Λύνοντας την τρίτη εξίσωση βρίσκουμε $z = \dfrac{(a+1)^2}{a+2}$. Αντικαθιστώντας στη δεύτερη βρίσκουμε μετά από μερικές πράξεις $y = \dfrac{1}{a+2}$, οπότε από την πρώτη βρίσκουμε τελικά $x = \dfrac{-(a+1)}{a+2}$.

- *Περίπτωση 2.* Έστω $a = -2$.

  Τότε από την τρίτη εξίσωση βλέπουμε ότι το σύστημα είναι αδύνατο.

- *Περίπτωση 3.* Έστω $a = 1$.

  Τότε το σύστημα είναι το $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 0=0 \\ 0=0. \end{cases}$

  Υπάρχουν άπειρες λύσεις $(x,y,z) = (1-y-z, y, z),\ y,z \in \mathbb{R}$.

Άσκηση

Εξετάστε για ποιες τιμές των $a,b\in\mathbb{R}$ το επόμενο σύστημα έχει μοναδική λύση, άπειρες λύσεις ή είναι αδύνατο

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=1\\ x_1+ax_2+ax_3&=b\\ x_1+a^2x_2+2ax_3&=ab. \end{aligned}$$

Λύση

Εφαρμόζοντας τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς $r_2\to r_2-r_1$, $r_3\to r_3-r_1$ και $r_3\to r_3-(-a-1)r_2$, ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος παίρνει τη μορφή

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & a-1 & a-1 & b-1\\ 0 & 0 & a(2-a) & a-b \end{pmatrix}$$

οπότε το αντίστοιχο σύστημα είναι το

$$\begin{aligned} x_1+\quad x_2+\quad x_3&=1\\ (a-1)x_2+(a-1)x_3&=b-1\\ a(2-a)x_3&=a-b. \end{aligned}$$

Περίπτωση 1. Έστω $a(2-a)(1-a)\neq 0$.

Τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση.

Περίπτωση 2. Έστω $a=0$.

- Αν $b\neq 0$, από την τρίτη εξίσωση βλέπουμε ότι το σύστημα είναι αδύνατο.
- Αν $b=0$, υπάρχουν άπειρες λύσεις.

Περίπτωση 3. Έστω $a=2$.

- Αν $b\neq 2$, από την τρίτη εξίσωση βλέπουμε ότι το σύστημα είναι αδύνατο.
- Αν $b=2$, υπάρχουν άπειρες λύσεις.

Περίπτωση 4. Έστω $a=1$.

- Αν $b\neq 1$, από τη δεύτερη εξίσωση βλέπουμε ότι το σύστημα είναι αδύνατο.
- Αν $b=1$, υπάρχουν άπειρες λύσεις.

Άσκηση

Υπολογίστε την ορίζουσα του πίνακα $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\\13&14&15&16\end{pmatrix}$.

Λύση

Φυσικά θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την ορίζουσα αναπτύσσοντάς την ως προς μια γραμμή ή στήλη αλλά έτσι απαιτούνται πολλές πράξεις.

Ένας πιο σύντομος και κομψός τρόπος είναι: Αφαιρούμε την πρώτη γραμμή από την δεύτερη οπότε παίρνουμε τον πίνακα $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&4&4&4\\9&10&11&12\\13&14&15&16\end{pmatrix}$. Στη συνέχεια αφαιρούμε την τρίτη γραμμή από την τέταρτη και παίρνουμε τον $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&4&4&4\\9&10&11&12\\4&4&4&4\end{pmatrix}$.

Ο τελευταίος πίνακας έχει δυο ίσες γραμμές και επομένως η ορίζουσά του είναι ίση με 0 Τελικά $\det A=0$.

Άσκηση

1) Για ποιες τιμές του a ο πίνακας $A=\begin{pmatrix}a&1&0\\-1&2&3\\1&a&1\end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος;

2) Για ποιες τιμές του a ο πίνακας $A=\begin{pmatrix}1&-1&2&1\\2&1&1&1\\-2&2&a&2\\3&-3&6&a\end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος;

Λύση

1) Υπολογίζοντας την ορίζουσα ως προς την πρώτη γραμμή έχουμε

$\det A = a(2-3a)-(-1-3) = -3a^2+2a+4$. A είναι αντιστρέψιμος

αν και μόνο αν $-3a^2+2a+4 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \dfrac{1 \pm \sqrt{13}}{3}$.

2) Θα μπορούσαμε να ακολουθήσουμε την ίδια μεθοδολογία με το προηγούμενο ερώτημα. Επειδή οι πράξεις στον υπολογισμό της συγκεκριμένης ορίζουσας είναι πολλές, θα χρησιμοποιήσουμε έναν άλλο τρόπο που είναι ουσιαστικά δεν είναι άλλος από τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss:

Έχουμε διαδοχικά

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & a & 2 \\ 3 & -3 & 6 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \\ -2 & 2 & a & 2 \\ 3 & -3 & 6 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 + 2r_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & a+4 & 4 \\ 3 & -3 & 6 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4 \to r_4 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & a+4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{pmatrix}$$

Στην προηγούμενη διαδικασία δεν υπήρξαν πολλαπλασιασμοί γραμμών.

Συνεπώς $\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & a & 2 \\ 3 & -3 & 6 & a \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & a+4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{pmatrix} = 3(a+4)(a-3)$

Άρα ο αρχικός πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $a \neq -4, 3$.

Άσκηση

Να υπολογιστεί η ορίζουσα $\det\begin{pmatrix} 1 & x & y & 1 \\ 1 & x & x & x \\ x & 1 & xy & y \\ x & x & xy & 1 \end{pmatrix}$

Λύση

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x & y & 1 \\ 1 & x & x & x \\ x & 1 & xy & y \\ x & x & xy & 1 \end{pmatrix} = \qquad r_2 \to r_2 - r_1$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x & y & 1 \\ 0 & 0 & x-y & x-1 \\ x & 1 & xy & y \\ x & x & xy & 1 \end{pmatrix} = \qquad r_3 \to r_3 - xr_1$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x & y & 1 \\ 0 & 0 & x-y & x-1 \\ 0 & 1-x^2 & 0 & y-x \\ x & x & xy & 1 \end{pmatrix} = \qquad r_4 \to r_4 - xr_1$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x & y & 1 \\ 0 & 0 & x-y & x-1 \\ 0 & 1-x^2 & 0 & y-x \\ 0 & x-x^2 & 0 & 1-x \end{pmatrix} =$$

ανάπτυγμα ως προς την πρώτη στήλη

$$\det\begin{pmatrix} 0 & x-y & x-1 \\ 1-x^2 & 0 & y-x \\ x-x^2 & 0 & 1-x \end{pmatrix} =$$

ανάπτυγμα ως προς τη δεύτερη στήλη

$$-(x-y)\det\begin{pmatrix} 1-x^2 & y-x \\ x-x^2 & 1-x \end{pmatrix} =$$

παραγοντοποίηση στην πρώτη στήλη

$$-(x-y)\det\begin{pmatrix} (1-x)(1+x) & y-x \\ (1-x)x & 1-x \end{pmatrix} =$$

Πρόταση 3 1)

$$-(x-y)(1-x)\det\begin{pmatrix} 1+x & y-x \\ x & 1-x \end{pmatrix} =$$

πράξεις

$$-(x-y)(1-x)\big((1+x)(1-x)-(y-x)x\big) =$$

$$(x-1)(x-y)(1-xy).$$

Άσκηση

Έστω a,b,c διακεκριμένοι αριθμοί.
Υπολογίστε την ορίζουσα και τον αντίστροφο του

$$\textit{πίνακα } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}.$$

Λύση

Αφαιρώντας την πρώτη στήλη από τις άλλες δύο έχουμε

$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{pmatrix}$. Από τη δεύτερη στήλη βγάζουμε κοινό

παράγοντα το $b-a$ και από την τρίτη το $c-a$. Παίρνουμε

$\det A = (b-a)(c-a)\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ a^2 & b+a & c+a \end{pmatrix}$. Αναπτύσσοντας την τελευταία ορίζουσα

ως προς την πρώτη γραμμή βρίσκουμε $\det A = (b-a)(c-a)(c-b)$.

Επειδή οι a,b,c είναι διακεκριμένοι έχουμε $\det A \neq 0$ και συνεπώς ο A είναι αντιστρέψιμος. Ο αντίστροφος μπορεί να υπολογιστεί με τον προσαρτημένο πίνακα. Μετά από μερικές πράξεις βρίσκουμε

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} adjA = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} b & c \\ b^2 & c^2 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ b^2 & c^2 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ b & c \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} a & c \\ a^2 & c^2 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a^2 & c^2 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & c \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a^2 & b^2 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(c-a)(c-b)(b-a)} \begin{pmatrix} bc^2-b^2c & b^2-c^2 & c-b \\ a^2c-ac^2 & c^2-a^2 & a-c \\ ab^2-a^2b & -b^2+a^2 & b-a \end{pmatrix}.$$

Οι ασκήσεις και τα παραδείγματα είναι από:

- Παραδείγματα και Ασκήσεις Γραμμικής Άλγεβρας (Μιχάλης Μαλιάκας, Μαρία Αδάμ)
- ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι (Α. Μπεληγιάννης)
- Ασκήσεις Γραμμικής 'Αλγεβρας (Ν. Μαρμαρίδης - Κ. Μέξης)