Ασκήσεις - Παραδείγματα

Άσκηση: Ποιος είναι ο όγκος του παραλληλεπιπέδου τα μεγέθη του οποίου ορίζονται από τα διανύσματα u=(3, 2, 1), v= (-1 , 3, 0) και w= (2, 2, 5). Στην συνέχεια βρείτε τον όγκο του τετράπλευρου που ορίζεται από τα ίδια διανύσματα.

Λύση: Ο όγκος του παραλληλεπιπέδου είναι ίσος με την ορίζουσα που αποτελείται από τις συντεταγμένες των 3 διανυσμάτων, δηλ. V = |A| = 47.
Αντίστοιχα ο όγκος του τετράπλευρου είναι 47/6.

Άσκηση *Να λυθεί το σύστημα:*

$$(\Sigma)\ \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

Λύση. Έχουμε:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad (A\,|\,B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Εκτελούμε στοιχιώδεις πράξεις στις γραμμές του επαυξημένου πίνακα του (Σ):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\Gamma_3 \to \frac{1}{4}\Gamma_3]{\Gamma_2 \to -\Gamma_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_2]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + 4\Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι ο επαυξημένος πίνακας του γραμμικού συστήματος

$$(\Sigma')\ \begin{cases} x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1 \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 = 1 \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

το οποίο έχει προφανή λύση την $x_1 = x_2 = x_3 = 1$. Επειδή το (Σ') είναι ισοδύναμο με το (Σ), έπεται ότι το (Σ) έχει μοναδική λύση την:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1$$

Άσκηση *Να λυθεί το σύστημα:*

$$(\Sigma)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 4 \\ 4x_1 + x_2 - 6x_3 = 8 \end{cases}$$

Λύση. Έχουμε:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-5\\2&-3&4\\4&1&-6\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2\\4\\8\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\quad (A\,|\,B)=\begin{pmatrix}1&2&-5&|&2\\2&-3&4&|&4\\4&1&-6&|&8\end{pmatrix}$$

Εκτελούμε στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές του επαυξημένου πίνακα του (Σ):

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-5&2\\2&-3&4&4\\4&1&-6&8\end{array}\right)\xrightarrow[\Gamma_3\to\Gamma_3-4\Gamma_1]{\Gamma_2\to\Gamma_2-2\Gamma_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-5&2\\0&-7&14&0\\0&-7&14&0\end{array}\right)\xrightarrow{\Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-5&2\\0&-7&14&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{\Gamma_2\to-\frac{1}{7}\Gamma_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-5&2\\0&1&-2&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{\Gamma_1\to\Gamma_1-2\Gamma_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&2\\0&1&-2&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι ο επαυξημένος πίνακας του γραμμικού συστήματος

$$(\Sigma')\ \begin{cases} x_1 + 0x_2 - x_3 = 2 \\ 0x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \end{cases}$$

Για το (Σ') έχουμε: $x_2 = 2x_3$ και $x_1 = 2 - x_3$. Θέτουμε $x_3 = \lambda$ (αυθαίρετη τιμή από το σώμα $\mathbb{K}$), και τότε έπεται ότι το σύτστημα (Σ') έχει άπειρες λύσεις, οι οποίες εξαρτώνται από μια παράμετρο $\lambda \in \mathbb{K}$), τις εξής: $x_1 = 2+\lambda$, $x_2 = 2\lambda$, $x_3 = \lambda$. Επειδή το σύστημα (Σ') είναι ισοδύναμο με το (Σ), έπεται ότι το σύτστημα (Σ) έχει άπειρες λύσεις, οι οποίες εξαρτώνται από μια παράμετρο $\lambda \in \mathbb{K}$), τις εξής:

$$x_1 = 2+\lambda,\quad x_2 = 2\lambda,\quad x_3 = \lambda,\quad (\lambda \in \mathbb{K})$$

Άσκηση *Να λυθεί το σύστημα:*

$$(\Sigma)\ \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 8x_1 + 12x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 0 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + -7x_4 = 0 \end{cases}$$

Λύση. Έχουμε:

$$A=\begin{pmatrix}2&3&-1&1\\8&12&-9&8\\4&6&3&-2\\2&3&9&-7\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix},\quad (A\,|\,B)=\begin{pmatrix}2&3&-1&1&|&0\\8&12&-9&8&|&0\\4&6&3&-2&|&0\\2&3&9&-7&|&0\end{pmatrix}$$

Επειδή ο πίνακας των σταθερών όρων είναι ο μηδενικός εργαζόμαστε Εκτελώντας στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές του πίνακα A των συντελεστών (Σ):

$$\begin{pmatrix}2&3&-1&1\\8&12&-9&8\\4&6&3&-2\\2&3&9&-7\end{pmatrix}\xrightarrow[\Gamma_3\to\Gamma_3-2\Gamma_1,\ \Gamma_4\to\Gamma_4-\Gamma_1]{\Gamma_2\to\Gamma_2-4\Gamma_1}\begin{pmatrix}2&3&-1&1\\0&0&-5&4\\0&0&5&-4\\0&0&10&-8\end{pmatrix}\xrightarrow[\Gamma_4\to\Gamma_4+2\Gamma_2]{\Gamma_3\to\Gamma_3+\Gamma_2}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_1 \to \frac{1}{2}\Gamma_1]{\Gamma_2 \to -\frac{1}{5}\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \to \Gamma_1 + \frac{1}{2}\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι ο επαυξημένος του συστήματος

$$(\Sigma') \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & \frac{3}{2}x_2 & + & 0x_3 & + & \frac{1}{10}x_4 & = & 0 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & x_3 & - & \frac{4}{5}x_4 & = & 0 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & = & 0 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

Για το (Σ') έχουμε: $x_3 = \frac{4}{5}x_4$ και $x_1 = -\frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{10}x_4$. Θέτοντας

$$x_2 = \lambda \quad \text{και} \quad x_4 = \mu \quad (\text{αυθαίρετες τιμές από το σώμα } \mathbb{K})$$

έπεται ότι το (Σ') έχει άπειρες λύσεις, οι οποίες εξαρτώνται από δύο παραμέτρους $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$: $x_1 = -\frac{3}{2}\lambda - \frac{1}{10}\mu$, $x_2 = \lambda$, $x_3 = \frac{4}{5}\mu$, $x_4 = \mu$. Επειδή το σύστημα (Σ) είναι ισοδύναμο με το (Σ'), έπεται ότι το (Σ) έχει άπειρες λύσεις οι οποίες εξαρτώνται από δύο παραμέτρους $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, τις εξής:

$$x_1 = -\frac{3}{2}\lambda - \frac{1}{10}\mu, \quad x_2 = \lambda, \quad x_3 = \frac{4}{5}\mu, \quad x_4 = \mu \quad (\lambda,\ \mu \in \mathbb{K})$$

Άσκηση : *Να λυθεί το σύστημα:*

$$(\Sigma) \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & - & x_5 & = & 0 \\ -x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & & & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & = & \lambda \\ -4x_1 & + & 4x_2 & - & 4x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & -\lambda \end{array} \right.$$

Λύση. Έχουμε:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -4 & 4 & -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \\ -\lambda \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

$$(A\,|\,B) = \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & \lambda \\ -4 & 4 & -4 & -1 & 1 & -\lambda \end{array}\right)$$

Εκτελούμε στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές του επαυξημένου πίνακα του (Σ):

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & \lambda \\ -4 & 4 & -4 & -1 & 1 & -\lambda \end{array}\right) \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + \Gamma_1} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \lambda \\ -4 & 4 & -4 & -1 & 1 & -\lambda \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_4 \to \Gamma_4 + 4\Gamma_1}$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 & -\lambda \end{array}\right) \xrightarrow[\Gamma_4 \to \Gamma_4 + \Gamma_2]{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -\lambda \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_4 \to \Gamma_4 + 2\Gamma_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & | & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \to \frac{1}{2}\Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & \frac{\lambda}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & \lambda \end{pmatrix}$$

και άρα καταλήγουμε στο παρακάτω σύστημα:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_5 = 0 \\ x_4 - x_5 = 0 \\ x_5 = \frac{\lambda}{2} \\ 0 = \lambda \end{cases}$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(1) Αν $\lambda \neq 0$ τότε έπεται ότι το σύστημα (Σ) είναι αδύνατο.

(2) Αν $\lambda = 0$ τότε έχουμε $x_5 = 0$ και άρα $x_4 = 0$. Ακόμα, από την πρώτη εξίσωση έχουμε $x_1 = x_2 - x_3$. Θέτουμε $x_2 = \kappa$ και $x_3 = \nu$ με $\kappa, \nu \in \mathbb{R}$. Τότε έχουμε τη γενική λύση:

$$\begin{cases} x_1 = \kappa - \nu \\ x_2 = \kappa \\ x_3 = \nu \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases} \qquad \kappa, \nu \in \mathbb{R}.$$

Άσκηση *Να λυθεί το σύστημα:*

$$(\Sigma) \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 1 - 2\lambda \\ x_2 + x_3 = -2\lambda \\ x_4 - x_5 = 1 - \lambda \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 2 - 2\lambda \end{cases}$$

Λύση. Έχουμε:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1-2\lambda \\ -2\lambda \\ 1-\lambda \\ 2-2\lambda \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

$$(A \,|\, B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -2 & | & 1-2\lambda \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & | & -2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & | & 1-\lambda \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & | & 2-2\lambda \end{pmatrix}$$

Εκτελούμε στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές του επαυξημένου πίνακα του (Σ):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -2 & | & 1-2\lambda \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & | & -2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & | & 1-\lambda \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & | & 2-2\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_4 \to \Gamma_4 - \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -2 & | & 1-2\lambda \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & | & -2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & | & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_4 \to \Gamma_4 - \Gamma_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -2 & | & 1-2\lambda \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & | & -2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & | & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1+\lambda \end{pmatrix}$$

και άρα καταλήγουμε στο παρακάτω σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & - & 2x_5 & = & 1-2\lambda \\ & & x_2 & + & x_3 & & & & & = & -2\lambda \\ & & & & & & x_4 & - & x_5 & = & 1-\lambda \\ & & & & & & & & 0 & = & 1+\lambda \end{array}\right.$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(1) Αν $\lambda \neq -1$ τότε το σύστημα (Σ) είναι αδύνατο.

(2) Για $\lambda = -1$ έχουμε το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & - & 2x_5 & = & 3 \\ & & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 2 \\ & & & & & & x_4 & - & x_5 & = & 2 \end{array}\right.$$

Συνεπώς έχουμε ότι $x_2 = 2 - x_3$, $x_4 = 2 + x_5$ και αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση βρίσκουμε $x_1 = -1 - x_3 + x_5$. Θέτουμε $x_3 = \nu$ και $x_5 = \kappa$ με $\kappa, \nu \in \mathbb{R}$. Τότε έχουμε τη γενική λύση:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = -1 - \nu + \kappa \\ x_2 = 2 - \nu \\ x_3 = \nu \\ x_4 = 2 + \kappa \\ x_5 = \nu \end{array}\right. \qquad \kappa, \nu \in \mathbb{R}.$$

Άσκηση *Να λυθεί το σύστημα* $(\lambda \in \mathbb{R})$:

$$(\Sigma) \qquad \left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & z & = & 3 \\ x & + & y & + & \lambda z & = & 1 \\ x & + & \lambda y & + & z & = & \lambda \end{array}\right.$$

Λύση. Έχουμε:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (A\,|\,B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 3 \\ 1 & 1 & \lambda & | & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & | & \lambda \end{pmatrix}$$

Εκτελούμε στοιχιώδεις πράξεις στις γραμμές του επαυξημένου πίνακα του (Σ):

$$(A\,|\,B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 3 \\ 1 & 1 & \lambda & | & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & | & \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 2 & \lambda - 1 & | & -2 \\ 0 & \lambda + 1 & 0 & | & \lambda - 3 \end{pmatrix}$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(1) Αν $\lambda + 1 = 0$, δηλαδή $\lambda = -1$, τότε ο τελευταίος πίνακας είναι της μορφής:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 2 & -2 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & | & -4 \end{pmatrix}$$

ο οποίος είναι ο επαυξημένος ενός συστήματος (Σ') ισοδύναμου με το (Σ). Επειδή προφανώς το (Σ') είναι αδύνατο (η τελευταία εξίσωση του είναι της μορφής $0x + 0y + 0z = -4$), έπεται ότι το (Σ) είναι αδύνατο.

(2) Αν $\lambda + 1 \neq 0$, δηλαδή $\lambda \neq -1$, τότε εκτελούμε στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές του τελευταίου πίνακα:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & \lambda+1 & 0 & \lambda-3 \end{array}\right) \xrightarrow[\Gamma_3 \to \frac{1}{\lambda+1}\Gamma_3]{\Gamma_2 \to \frac{1}{2}\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{\lambda-1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\lambda-3}{\lambda+1} \end{array}\right) \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2]{\Gamma_1 \to \Gamma_1 + \Gamma_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{\lambda+1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{\lambda-1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{-\lambda+1}{2} & \frac{2(\lambda-1)}{\lambda+1} \end{array}\right)$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(α') Αν $-\frac{-\lambda+1}{2} = 0$, δηλαδή αν $\lambda = 1$, τότε ο τελευταίος πίνακας είναι της μορφής

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

και είναι ο επαυξημένος πίνακας του γραμμικού συστήματος

$$(\Sigma'') \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 0y & + & z & = & 2 \\ 0x & + & y & + & 0z & = & -1 \\ 0x & + & 0y & + & 0z & = & 0 \end{array} \right.$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με το σύστημα (Σ). Θέτοντας $z = \kappa$ να είναι μια αυθαίρετη τιμή από το σώμα $\mathbb{K}$, έπεται ότι το (Σ'') έχει άπειρες λύσεις, οι οποίες εξαρτώνται από μια παράμετρο $\kappa \in \mathbb{K}$: $x = 2 - \kappa$, $y = -1$, $z = \kappa$. Επειδή το (Σ'') είναι ισοδύναμο με το (Σ), έπεται ότι το (Σ) έχει άπειρες λύσεις οι οποίες εξαρτώνται από μια παράμετρο, τις εξής:

$$x = 2 - \kappa, \quad y = -1, \quad z = \kappa \quad (\kappa \in \mathbb{K})$$

(β') Αν $-\frac{-\lambda+1}{2} \neq 0$, δηλαδή αν $\lambda \neq 1$, τότε ο τελευταίος πίνακας είναι της μορφής

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{\lambda+1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{\lambda-1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{-\lambda+1}{2} & \frac{2(\lambda-1)}{\lambda+1} \end{array}\right) \xrightarrow[\Gamma_3 \to \frac{2}{-\lambda+1}\Gamma_3]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 + \Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{\lambda+1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\lambda-3}{\lambda+1} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{\lambda+1} \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \frac{\lambda+1}{2}\Gamma_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\lambda-3}{\lambda+1} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{\lambda+1} \end{array}\right)$$

ο τελευταίος πίνακας είναι ο επαυξημένος πίνακας του γραμμικού συστήματος

$$(\Sigma''') \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 0y & + & z & = & 4 \\ 0x & + & y & + & 0z & = & \frac{\lambda-3}{\lambda+1} \\ 0x & + & 0y & + & z & = & -\frac{4}{\lambda+1} \end{array} \right.$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με το σύστημα (Σ). Προφανώς το (Σ'') έχει μοναδική λύση την $x = 4$, $y = \frac{\lambda-3}{\lambda+1}$, $z = -\frac{4}{\lambda+1}$. Επειδή το (Σ''') είναι ισοδύναμο με το (Σ), έπεται ότι το (Σ) έχει μοναδική λύση, την εξής:

$$x = 4, \quad y = \frac{\lambda-3}{\lambda+1}, \quad z = -\frac{4}{\lambda+1}$$

Συνοψίζοντας, δείξαμε ότι το σύστημα (Σ) είναι:

(1) Είναι **αδύνατο**, αν $\lambda = -1$.

(2) Έχει **άπειρες λύσεις**, αν: $\lambda \neq -1$ και $\lambda = 1$. Οι άπειρες λύσεις του (Σ) εξαρτώνται από μια παράμετρο και είναι οι εξής:

$$x = 2-\kappa, \quad y=-1, \quad z=\kappa \quad (\kappa \in \mathbb{K})$$

(3) Έχει **μοναδική λύση**, αν $\lambda \neq 1$ και $\lambda \neq -1$. Η μοναδική λύση του (Σ) είναι η εξής:

$$x=4, \quad y=\frac{\lambda-3}{\lambda+1}, \quad z=-\frac{4}{\lambda+1}$$

Άσκηση : *Αν $a, b \in \mathbb{R}$, να λυθεί το σύστημα:*

$$(\Sigma) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & + & z & = & -6a \\ 2x & + & y & + & (b+1)z & = & 4 \\ bx & + & 3y & + & 2z & = & 3a \end{array} \right.$$

Λύση. Έχουμε:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & (b+1) \\ b & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -6a \\ 4 \\ 3a \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (A\,|\,B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & -6a \\ 2 & 1 & (b+1) & 4 \\ b & 3 & 2 & 3a \end{array}\right)$$

Εκτελούμε στοιχιώδεις πράξεις στις γραμμές του επαυξημένου πίνακα του (Σ):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & -6a \\ 2 & 1 & (b+1) & 4 \\ b & 3 & 2 & 3a \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & -6a \\ 0 & 0 & b & 4+6a \\ b & 3 & 2 & 3a \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_1 \to \frac{1}{2}\Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -3a \\ 0 & 0 & b & 4+6a \\ b & 3 & 2 & 3a \end{array}\right)$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(1) $b=0$. Τότε ο τελευταίος πίνακας είναι ο

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -3a \\ 0 & 0 & 0 & 4+6a \\ 0 & 3 & 2 & 3a \end{array}\right)$$

ο οποίος είναι ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος

$$(\Sigma') \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & \frac{1}{2}y & + & \frac{1}{2}z & = & -3a \\ 0x & + & 0y & + & 0z & = & 4+6a \\ 0x & + & 3y & + & 2z & = & 3a \end{array} \right.$$

Από το οποίο βλέπουμε ότι:

(α') Αν $4+6a \neq 0$, δηλαδή αν $a \neq -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$, τότε το (Σ') είναι αδύνατο. Επειδή το (Σ) είναι ισοδύναμο με το (Σ'), έπεται ότι αν $a \neq -\frac{2}{3}$, τότε το (Σ) είναι αδύνατο.

(β') Αν Αν $4+6a=0$, δηλαδή αν $a = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$, τότε ο επαυξημένος πίνακας του (Σ') είναι

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_2 \to \frac{1}{3}\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \frac{1}{2}\Gamma_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι είναι ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος

$$(\Sigma'') \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & 0y & + & \frac{1}{6}z & = & \frac{1}{7} \\ 0x & + & y & + & \frac{2}{3}z & = & -\frac{2}{3} \\ 0x & + & 0y & + & 0z & = & 0 \end{array} \right.$$

Από το οποίο βλέπουμε ότι: $y = -\frac{2}{3}(1+z)$ και $x = \frac{1}{7} - \frac{1}{6}z$. Θέτοντας $z=\lambda$, (αυθαίρετη τιμή από το σώμα $\mathbb{K}$), έπεται ότι το σύστημα (Σ'') έχει άπειρες λύσεις, οι οποίες εξαρτώνται από μια παράμετρο $\lambda \in \mathbb{K}$: $x = \frac{1}{7} - \frac{1}{6}\lambda$, $y = -\frac{2}{3}(1+\lambda)$, $z = \lambda$. Επειδή το (Σ'') είναι ισοδύναμο με το (Σ') και το (Σ') είναι ισοδύναμο με το (Σ),έπεται ότι το (Σ) έχει άπειρες λύσεις οι οποίες εξαρτώνται από μια παράμετρο $\lambda \in \mathbb{K}$, τις εξής:

$$x = \frac{1}{7} - \frac{1}{6}\lambda, \quad y = -\frac{2}{3}(1+\lambda), \quad z = \lambda, \quad (\lambda \in \mathbb{K})$$

(2) Αν $b \neq 0$. Τότε:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -3a \\ 0 & 0 & b & 4+6a \\ b & 3 & 2 & 3a \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -3a \\ b & 3 & 2 & 3a \\ 0 & 0 & b & 4+6a \end{array}\right) \xrightarrow[\Gamma_3 \to \frac{1}{b}\Gamma_3]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - b\Gamma_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -3a \\ 0 & 3-\frac{b}{2} & 2-\frac{b}{2} & 3a+3ab \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4+6a}{b} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -3a \\ 0 & \frac{6-b}{2} & \frac{4-b}{2} & 3a+3ab \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4+6a}{b} \end{array}\right)$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(α') Αν $b=6$, τότε έχουμε τον πίνακα:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -3a \\ 0 & 0 & -1 & 21a \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2+3a}{3} \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_3\to\Gamma_3+\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -3a \\ 0 & 0 & -1 & 21a \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2+69a}{3} \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_2\to-\Gamma_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -3a \\ 0 & 0 & 1 & -21a \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2+69a}{3} \end{array}\right)$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(i) Αν $\frac{2+69a}{3}\neq 0$, δηλαδή αν $a\neq -\frac{2}{69}$, τότε το (Σ) είναι αδύνατο, καθώς ο παραπάνω πίνακας είναι ο επαυξημένος πίνακας ενός συστήματος το οποίο είναι ισοδύναμο με το (Σ) και ειναι προφανώς αδύνατο.

(ii) Αν $\frac{2+69a}{3}=0$, δηλαδή αν $a=-\frac{2}{69}$, τότε ο τελευταίος πίνακας είναι:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -3\cdot(-\frac{2}{69}) \\ 0 & 0 & 1 & -21\cdot(-\frac{2}{69}) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2+69a}{3} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{2}{23} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{14}{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι ο πίνακας του επαυξημένου συστήματος

$$(\Sigma''')\ \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & \frac{1}{2}y & + & \frac{1}{2}z & = & \frac{2}{23} \\ 0x & + & 0y & + & z & = & -\frac{14}{23} \\ 0x & + & 0y & + & 0z & = & 0 \end{array}\right.$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με το (Σ) και το οποίο έχει άπειρες λύσεις: $z=-\frac{14}{23}$, και $x=-\frac{1}{2}\lambda+\frac{2}{23}$, όπου λ είναι μια αυθαίρετη παράμετρος από το σώμα $\mathbb{K}$. Επομένως το $(\Sigma$ έχει άπειρες λύσεις οι οποίες εξαρτώνται από μια παράμετρο $\lambda\in\mathbb{K}$:

$$x=-\frac{1}{2}\lambda+\frac{2}{23},\qquad y=\lambda,\qquad z=-\frac{14}{23},\qquad (\lambda\in\mathbb{K})$$

(β') Αν $b\neq 6$, τότε:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -3a \\ 0 & \frac{6-b}{2} & \frac{4-b}{2} & 3a+3ab \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4+6a}{b} \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_2\to\frac{2}{6-b}\Gamma_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -3a \\ 0 & 1 & \frac{4-b}{6-b} & \frac{6a+6ab}{6-b} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4+6a}{b} \end{array}\right) \xrightarrow{\Gamma_1\to\Gamma_1-\frac{1}{2}\Gamma_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{6-b} & -\frac{42a}{6-b} \\ 0 & 1 & \frac{4-b}{6-b} & \frac{6a+6ab}{6-b} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4+6a}{b} \end{array}\right)$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι ο πίνακας του επαυξημένου συστήματος

$$(\Sigma'''')\ \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 0y & + & \frac{1}{6-b}z & = & -\frac{42a}{6-b} \\ 0x & + & y & + & \frac{4-b}{6-b}z & = & \frac{6a+6ab}{6-b} \\ 0x & + & 0y & + & z & = & \frac{4+6a}{b} \end{array}\right.$$

το οποίο είναι ισοδυναμο με το (Σ) και έχει μοναδική λύση: $z=\frac{4+6a}{b}$, $y=\frac{6a+6ab}{6-b}-\frac{4-b}{6-b}\cdot\frac{4+6a}{b}=\frac{12ab+6ab^2+4b-24a-16}{b(6-b)}$, $x=-\frac{42a}{6-b}-\frac{1}{6-b}\cdot\frac{4+6a}{b}=\frac{-42ab-4-6a}{b(6-b)}$. Επειδή το (Σ'''') είναι ισοδύναμο με το (Σ), έπεται ότι το (Σ) έχει μοναδική λύση

$$x=-\frac{42ab+6a+4}{b(6-b)},\qquad y=\frac{12ab+6ab^2+4b-24a-16}{b(6-b)},\qquad z=\frac{4+6a}{b}$$

Άσκηση *Έστω $\lambda, a, b, c, h, g, f \in \mathbb{K}$, να βρεθούν αναγκαίες και ικανές συνθήκες στα στοιχεία αυτά έτσι ώστε το ομογενές σύστημα γραμμικών εξισώσεων*

$$(\Sigma)\quad \begin{cases} \lambda x + ay + bz + cw = 0 \\ -ax + \lambda y + hz - gw = 0 \\ -bx - hy + \lambda z + gw = 0 \\ -cx + gy - fz + \lambda w = 0 \end{cases}$$

να έχει μια μη-μηδενική λύση.

Λύση. Έστω ότι το (Σ) έχει μια μη-μηδενική λύση

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$$

δηλαδή ένα τουλάχιστον εκ των x_0, y_0, z_0, w_0 είναι μη-μηδενικό.

Τότε ικανοποιούνται οι ακόλουθες σχέσεις μεταξύ αριθμών του σώματος $\mathbb{K}$:

$$\begin{cases} \lambda x_0 + ay_0 + bz_0 + cw_0 = 0 & (A) \\ -ax_0 + \lambda y_0 + hz_0 - gw_0 = 0 & (B) \\ -bx_0 - hy_0 + \lambda z_0 + gw_0 = 0 & (C) \\ -cx_0 + gy_0 - fz_0 + \lambda w_0 = 0 & (D) \end{cases}$$

Πολλαπλασιάζοντας:

(1) την πρώτη σχέση (A) με λx_0,
(2) την δεύτερη σχέση (B) με λy_0,
(3) την τρίτη σχέση (C) με λz_0,
(4) την τέταρτη σχέση (D) με λw_0

και κατόπιν προσθέτοντας όλες τις σχέσεις που προκύπτουν, εύκολα βλέπουμε ότι προκύπτει η ακόλουθη σχέση

$$\lambda^2(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + w_0^2) = 0$$

Επειδή τουλάχιστον ένα εκ των x_0, y_0, z_0, w_0 είναι μη-μηδενικό, από την τελευταία σχέση έπεται ότι $\lambda^2 = 0$, δηλαδή $\lambda = 0$.

Τότε ο πίνακας των συντελεστών του συστήματος (Σ) είναι ο ακόλουθος:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & h & -g \\ -b & -h & 0 & f \\ -c & g & -f & 0 \end{pmatrix} \qquad (\dagger)$$

δηλαδή είναι ένας αντισυμμετρικός πίνακας τέταρτης τάξης. Επειδή το ομογενές σύστημα $A \cdot X = \mathbb{O}$, έχει τουλάχιστον μια μη-μηδενική λύση, έπεται ότι[3] $|A| = 0$.

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα του A κατά τα στοιχεία της πρώτης γραμμής βλέπουμε ότι:

$$|A| = (af + bg + ch)^2$$

Άρα θα πρέπει να έχουμε: $|A| = (af + bg + ch)^2 = 0$, απ' όπου έπεται ότι $af + bg + ch = 0$.

Επομένως δείξαμε ότι αν το (Σ) έχει τουλάχιστον μια μη-μηδενική λύση, τότε:

$$\lambda = af + bg + ch = 0$$

Αντίστροφα, αν $\lambda = af + bg + ch = 0$, τότε ο πίνακας A των συντελεστών του (Σ) είναι όπως στην παραπάνω σχέση $(\dagger)$ και άρα η ορίζουσά του θα είναι $|A| = (af + bg + ch)^2 = 0$. Αυτό όμως σημαίνει ότι[4] το (Σ) έχει τουλάχιστον μια μη-μηδενική λύση.

[3] Αν $|A| \neq 0$, τότε ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και τότε η σχέση $A \cdot X = \mathbb{O}$ δίνει $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot \mathbb{O}$, δηλαδή $I_4 \cdot X = \mathbb{O}$ απ' όπου $X = \mathbb{O}$. Αυτό είναι άτοπο από την υπόθεση ότι το (Σ) έχει μη-μηδενιές λύσεις.

[4] Πράγματι, επειδή $|A| \neq 0$, η τελευταία γραμμή στην ισχυρά γ-κλιμακωτή μορφή B του A θα είναι η μηδενική. Αυτό όπως μπορούμε να δούμε εύκολα σημαίνει ότι το ισοδύναμο με το (Σ) ομογενές σύστημα με πίνακα συντελεστών τον πίνακα B έχει άπειρες λύσεις οι οποίες εξαρτώνται από $n \geq 1$ παραμέτρους (Δείξτε το σαν Άσκηση).

Άσκηση *Εξετάστε αν τα παρακάτω διανύσματα του $\mathbb{R}^4$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*

1. $(1,1,-1,1),(2,1,0,1),(4,3,-2,2)$

2. $(1,1,-1,1),(2,1,0,1),(4,3,-2,3)$

Λύση

1. *Α τρόπος.*

εξετάζουμε αν υπάρχουν $a,b,c \in \mathbb{R}$ από τα οποία ένα τουλάχιστον να είναι μη μηδενικό τέτοια ώστε

$$a(1,1,-1,1)+b(2,1,0,1)+c(4,3,-2,2)=(0,0,0,0).$$

Έχουμε $a(1,1,-1,1)+b(2,1,0,1)+c(4,3,-2,2)=(0,0,0,0) \Rightarrow$

$$\begin{cases} a+2b+4c=0 \\ a+b+3c=0 \\ -a-2c=0 \\ a+b+2c=0. \end{cases}$$

Μετά από μερικούς στοιχειώδεις μετασχηματισμούς, ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος παίρνει την κλιμακωτή μορφή $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Από τον πίνακα αυτό συμπεραίνουμε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση (την τετριμμένη). Άρα $a=b=c=0$ και τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Β τρόπος.

Σχηματίζουμε τον πίνακα με γραμμές τα δοσμένα διανύσματα και τον φέρουμε σε κλιμακωτή μορφή $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Επειδή δεν υπάρχει μηδενική γραμμή στον τελευταίο πίνακα, τα δοσμένα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

2. *Α τρόπος.*

Όπως στον Α τρόπο του 1, από τη σχέση

$$a(1,1,-1,1)+b(2,1,0,1)+c(4,3,-2,3)=(0,0,0,0)$$

βρίσκουμε το σύστημα

$$\begin{cases} a+2b+4c=0 \\ a+b+3c=0 \\ -a-2c=0 \\ a+b+3c=0. \end{cases}$$

Μετά από μερικούς στοιχειώδεις μετασχηματισμούς, ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος παίρνει την κλιμακωτή μορφή

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Από τον πίνακα αυτό συμπεραίνουμε ότι το σύστημα έχει και άλλη λύση πέρα από την τετριμμένη. Δηλαδή υπάρχουν $a,b,c \in \mathbb{R}$ που δεν είναι όλα μηδέν τέτοια ώστε $a(1,1,-1,1)+b(2,1,0,1)+c(4,3,-2,3)=(0,0,0,0)$. Άρα τα δοσμένα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Β τρόπος.

Σχηματίζουμε τον πίνακα με γραμμές τα δοσμένα διανύσματα και τον φέρουμε σε κλιμακωτή μορφή

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Επειδή υπάρχει μηδενική γραμμή στον τελευταίο πίνακα, τα δοσμένα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Ασκηση

Εξετάστε αν τα επόμενα στοιχεία του $M_2(\mathbb{R})$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.$

Λύση

Εξετάζουμε αν υπάρχουν $a,b,c \in \mathbb{R}$ από τα οποία ένα τουλάχιστον να είναι μη μηδενικό και να ικανοποιούν την ισότητα

$$a\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Έχουμε

$$a\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1 & -5\\ -4 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$
$$\begin{pmatrix}a+3b+c & 2a-b-5c\\ 3a+2b-4c & a+2b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$
$$\begin{cases}a+3b+c=0\\ 2a-b-5c=0\\ 3a+2b-4c=0\\ a+2b=0.\end{cases}$$

Μετά από μερικούς στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών στον επαυξημένο πίνακα του τελευταίου συστήματος, φτάνουμε στην κλιμακωτή μορφή

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Άμεσα συμπεραίνουμε ότι το σύστημα έχει μη μηδενική λύση, οπότε τα δοσμένα στοιχεία είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Ασκηση

$$\begin{aligned}x+2y-4z+3w&=0\\ x+2y-2z+2w&=0\\ 2x+4y-2z+3w&=0\end{aligned}$$

Αφού λυθεί το σύστημα να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του χώρου των λύσεων.

Λύση

Μετά από μερικές πράξεις βρίσκουμε ότι η κλιμακωτή μορφή του πίνακα των συντελεστών είναι $\begin{pmatrix}1 & 2 & -4 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

Εύκολα βρίσκουμε τις λύσεις $(x,y,z,w)=(-2y-w,y,\frac{w}{2},w),\ y,w\in\mathbb{R}$. Η διάσταση του χώρου των λύσεων είναι $m-r=4-2=2$, όπου m = πλήθος αγνώστων και r = τάξη του πίνακα των συντελεστών. Για να βρούμε μία βάση, επιλέγουμε συγκεκριμένες τιμές για τις ελεύθερες μεταβλητές y,w ώστε οι δύο λύσεις να είναι γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία. Για παράδειγμα από $y=0, w=2$ και $y=1, w=2$ παίρνουμε τη βάση $\{(-2,0,1,2),(-4,1,1,2)\}$

Άσκηση

Να εξεταστεί εάν τα διανύσματα $u = (2, -1, 1)$, $v = (0, 2, -1)$ και $w = (1, -1, 0)$ τού $\mathbb{R}^3$ είναι $\mathbb{R}$-γραμμικώς εξαρτημένα.

Λύση (i)

Θα εξετάσουμε για ποιές τιμές των $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, ισχύει η σχέση:

$$\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0_{\mathbb{R}^3}. \qquad (*)$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των u, v, w στην $(*)$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned} &\lambda_1(2, -1, 1) + \lambda_2(0, 2, -1) + \lambda_3(1, -1, 0) = \\ &(2\lambda_1 + \lambda_3, -\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3, \lambda_1 - \lambda_2) = (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Επομένως, η ανωτέρω σχέση είναι αληθής, αν και μόνο αν

$$\begin{array}{rrrl} 2\lambda_1 & & +\lambda_3 & = 0 \\ -\lambda_1 & +2\lambda_2 & -\lambda_3 & = 0 \\ \lambda_1 & -\lambda_2 & & = 0 \end{array}. \qquad (**)$$

Θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα τού συστήματος

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Με αφετηρία τον ανωτέρω πίνακα και εκτελώντας την ακολουθία μετασχηματισμών

$$\Gamma_1 \leftrightarrows \Gamma_3, \Gamma_2 \to \Gamma_2 + \Gamma_1, \Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_1, \Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_2, \Gamma_3 \to \frac{1}{3}\Gamma_3$$

προκύπτει τελικώς ο γραμμοϊσοδύναμος πίνακας

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

που χορηγεί το ακόλουθο σύστημα:

$$\begin{array}{rrrl} \lambda_1 & -\lambda_2 & & = 0 \\ & \lambda_2 & -\lambda_3 & = 0 \\ & & \lambda_3 & = 0 \end{array}.$$

Πρόκειται για ένα σύστημα ισοδύναμο τού $(**)$ με μοναδική λύση, ως προς $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, τη μηδενική. Συνεπώς τα διανύσματα u, v, w είναι $\mathbb{R}$-γραμμικώς ανεξάρτητα.

Σημείωση. Στην περίπτωση ομογενών συστημάτων, όπως το ανωτέρω, δεν είναι απαραίτητος ο σχηματισμός τού επαυξημένου πίνακα τού συστήματος, αφού ο πίνακας των σταθερών ισούται με μηδέν. Με άλλα λόγια κάθε μετασχηματισμός επί των γραμμών τού πίνακα των συντελεστών ενός ομογενούς συστήματος χορηγεί ισοδύναμο ομογενές σύστημα.

Άσκηση

Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Να προσδιοριστεί ο συμπληρωματικός τού A πίνακας $\widetilde{A}$ και ακολούθως ο A^{-1}

(a) με τη βοήθεια τού $\widetilde{A}$,

(b) με την εκτέλεση στοιχειωδών πράξεων επί των γραμμών τού A.

Λύση

Για τον υπολογισμό τού συμπληρωματικού $\widetilde{A}$ τού πίνακα A, οφείλουμε να λογαριάσουμε τους συμπαράγοντες όλων των στοιχείων τού A. Έτσι έχουμε:

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \; A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \; A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \; A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \; A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 3, \; A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1, \; A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1.$$

Επομένως,

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{A}.$$

Θα υπολογίσουμε την $\det A$ με ανάπτυξη κατά τα στοιχεία τής πρώτης γραμμής. $\det A = 1 \cdot A_{11} + (-1) \cdot A_{12} + 2 \cdot A_{13} = 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 1 \neq 0.$

Άρα, $A^{-1} = \frac{1}{1}\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(b) Θεωρούμε τον επαυξημένο πίνακα

$$[A \mid I_3] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

και εκτελώντας την ακολουθία των στοιχειωδών μετασχηματισμών:

$\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1, \Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1, \Gamma_2 \to -\Gamma_2, \Gamma_3 \to -\Gamma_3, \Gamma_1 \to \Gamma_1 + \Gamma_2,$
$\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_3, \Gamma_1 \to \Gamma_1 - 3\Gamma_3$

προκύπτει τελικώς ο γραμμοϊσοδύναμος πίνακας:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Συνεπώς, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Άσκηση Έστω ο 3×3 πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & \beta \\ \alpha & 1 & -\gamma \\ -\beta & \gamma & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$.

(a) Να προσδιοριστούν οι τιμές των α, β, γ, έτσι ώστε $\det A \neq 0$.

(b) Να υπολογιστεί ο A^{-1} με τη βοήθεια τού συμπληρωματικού του $\widetilde{A}$.

Λύση (a)
Υπολογίζουμε την ορίζουσα τού A με ανάπτυξη κατά τα στοιχεία τής πρώτης γραμμής: $\det A = 1 \cdot A_{11} + (-\alpha)A_{12} + \beta A_{13} =$

$$1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & -\gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} + (-\alpha)(-1)^3 \cdot \det\begin{pmatrix} \alpha & -\gamma \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} + \beta(-1)^4 \cdot \det\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -\beta & \gamma \end{pmatrix} =$$
$$1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2.$$

Η ποσότητα $1+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ είναι θετική για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β, γ. Άρα, η ορίζουσα $\det A$ είναι πάντοτε μη-μηδενική.

(b)
Αφού σύμφωνα με το (a) η $\det A$ δεν ισούται ποτέ με 0, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει για οποιαδήποτε α, β, γ ο αντίστροφος πίνακας A^{-1}.
Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{A}$.
Για να προσδιορίσουμε τον συμπληρωματικό πίνακα $\widetilde{A}$ τού A, οφείλουμε να υπολογίσουμε τους συμπαράγοντες όλων των στοιχείων τού A. Έτσι έχουμε:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -\gamma \\ \gamma & 1 \end{vmatrix} = 1 + \gamma^2, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} \alpha & -\gamma \\ -\beta & 1 \end{vmatrix} = -\alpha + \beta\gamma, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ -\beta & \gamma \end{vmatrix} = \alpha\gamma + \beta,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -\alpha & \beta \\ \gamma & 1 \end{vmatrix} = \alpha + \beta\gamma, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & \beta \\ -\beta & 1 \end{vmatrix} = 1 + \beta^2, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -\alpha \\ -\beta & \gamma \end{vmatrix} = -\gamma + \alpha\beta,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -\alpha & \beta \\ 1 & -\gamma \end{vmatrix} = \alpha\gamma - \beta, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & \beta \\ \alpha & -\gamma \end{vmatrix} = \gamma + \alpha\beta, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -\alpha \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} = 1 + \alpha^2.$$

Επομένως,

$$A^{-1} = \frac{1}{1+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\begin{pmatrix} 1+\gamma^2 & \alpha+\beta\gamma & \alpha\gamma-\beta \\ -\alpha+\beta\gamma & 1+\beta^2 & \gamma+\alpha\beta \\ \alpha\gamma+\beta & -\gamma+\alpha\beta & 1+\alpha^2 \end{pmatrix}$$

Οι ασκήσεις και τα παραδείγματα είναι από:

- Παραδείγματα και Ασκήσεις Γραμμικής Άλγεβρας (Μιχάλης Μαλιάκας, Μαρία Αδάμ)
- ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι (Α. Μπεληγιάννης)
- Ασκήσεις Γραμμικής 'Αλγεβρας (Ν. Μαρμαρίδης - Κ. Μέξης)