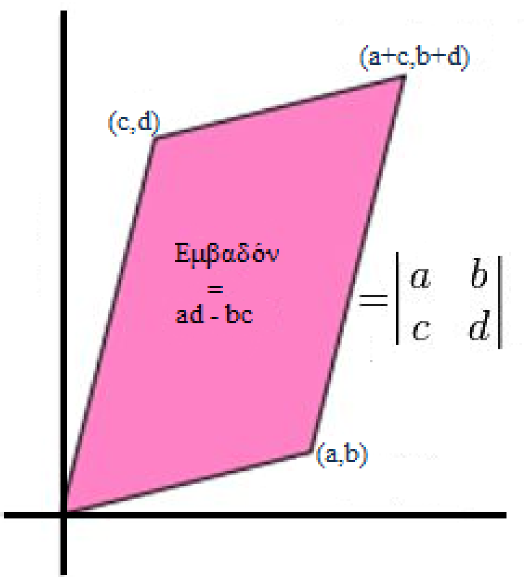
Ορίζουσες & Γραμμικά συστήματα εξισώσεων

Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας

Ορίζουσα και Όγκος

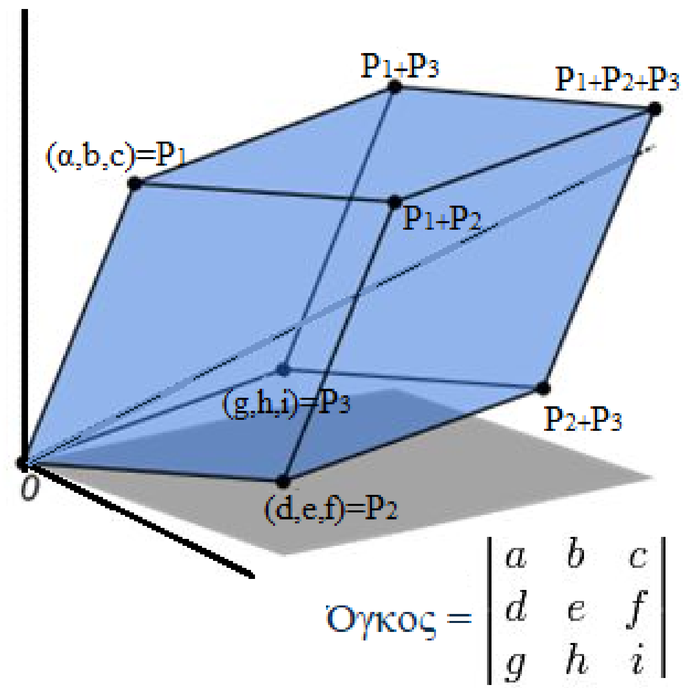
Η ορίζουσα είναι ένα ισχυρό εργαλείο για την εύρεση του όγκου!

Αν έχω n διανύσματα u_1, u_2, u_3, … u_n στο $\mathbb{R}^n$, τότε ο όγκος του παραλληλεπιπέδου που ορίζεται από αυτά δίνεται από την *απόλυτη τιμή* της ορίζουσας των συντεταγμένων τους



Στο $\mathbb{R}^2$, μου δίνει το Εμβαδόν

ΠΑΝΤΑ η αρχή των αξόνων σε μία κορυφή



Στο $\mathbb{R}^3$, μου δίνει τον Όγκο

Ασκήσεις

Ποιος είναι ο όγκος (ή εμβαδόν) του παραλληλεπιπέδου (ή παραλληλογράμμου) που ορίζεται από τα διανύσματα:

1. u = (1, 0) & v = (1,2)

   Λύση: 2

2. u = (1, 4, 0), v = (-2, -5, 2) & t = (-1, 2, -1)

   Λύση: |- 15| = 15

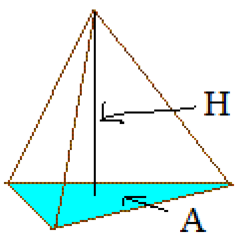
3. Τι θα συμβεί στον όγκο του προηγούμενου παραλληλεπιπέδου αν αλλάξω την σειρά που βάζω τις συντεταγμένες;

Όγκος τετράεδρου

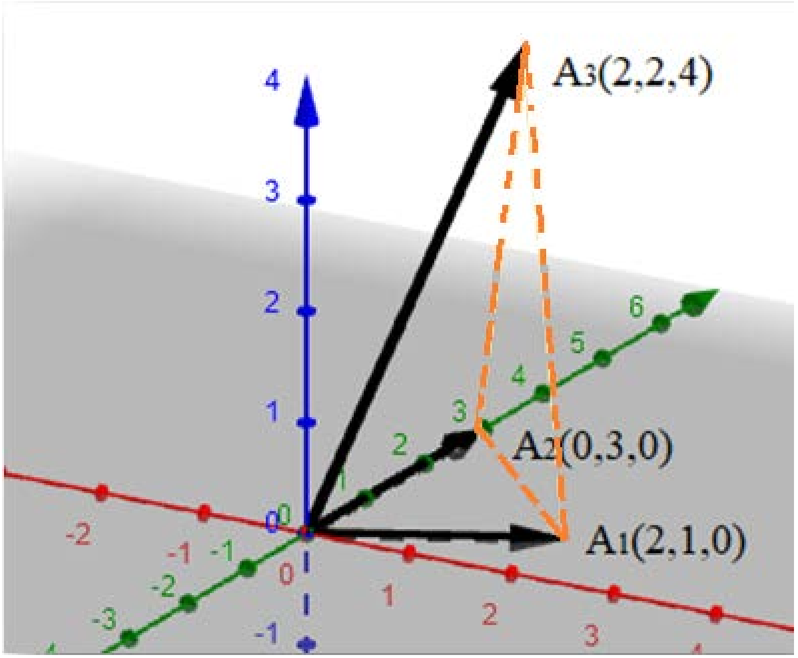
Από την προηγούμενη θεωρία μπορούμε να βρούμε τον όγκο ενός τετράεδρου.

Έστω τα διανύσματα (2,1,0), (0,3,0), (2,2,4):
θα υπολογίσουμε τον όγκο του 4εδρου $OA_1A_2A_3$

Ο όγκος του τετράεδρου σχήματος δίνεται από τον τύπο:



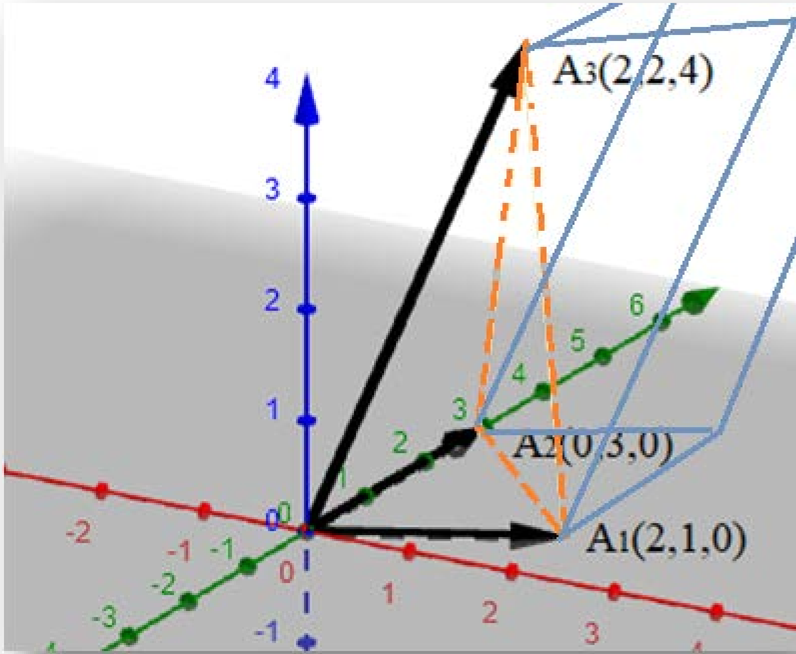
$$V = \frac{1}{3} AH$$



Όγκος τετράεδρου συνέχεια

Αν στο σχήμα δημιουργήσω το παραλληλεπίπεδο με ακμές A_1, A_2 και A_3, τότε ο όγκος του είναι:

$$V\pi = \text{Βάση} \cdot \text{Ύψος} = (2 \cdot A) \cdot H$$



(επέλεξα ως βάση αυτή που ορίζεται από τα A_1, A_2 , άρα:

a) η βάση είναι το διπλό της βάσης της τετράεδρης πυραμίδας και
b) το ύψος θα είναι και πάλι ίσο με H)

Άρα $V = \dfrac{1}{6} \cdot V\pi = \dfrac{24}{6} = 4$

Άσκηση

- Βρείτε με χρήση των οριζουσών τον όγκο του τετράεδρου που ορίζεται από τα διανύσματα:

  $A_1(2,2,-1)$, $A_2(1,3,0)$ και $A_3(-1,1,4)$

- Πόσο θα γίνει ο όγκος αν το A_3 μετακινηθεί στο (-201, -199, 104);

Λύση: α) 2
β) 2

Βαθμός μήτρας

Βαθμός μιας μήτρας A (rank(A)) είναι ο μέγιστος αριθμός γραμμικών ανεξάρτητων διανυσμάτων (στηλών)

Υπενθύμιση: Σε έναν διανυσματικό χώρο m διάστασης, τα διανύσματα $\upsilon_1+\upsilon_2+\upsilon_3+ \dots +\upsilon_\kappa$ είναι γραμμικώς **εξαρτημένα** αν υπάρχουν αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots \lambda_\kappa$, όχι όλοι μηδέν:

$$\lambda_1 \cdot \upsilon_1 + \lambda_2 \cdot \upsilon_2 + \dots + \lambda_\kappa \cdot \upsilon_\kappa = 0 \quad (1)$$

(ή ότι ένα από αυτά μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των άλλων)

Θα λέμε ότι είναι γραμμικώς **ανεξάρτητα** αν στην (1) $\lambda_i = 0$ για κάθε i

δηλ. η ορίζουσα των διανυσμάτων ≠ 0

Εύρεση βαθμού μήτρας

- **1^{ος} τρόπος**: Με ΣΜΓ έως ότου βρούμε τον μέγιστο αριθμό γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων (των γραμμών ≠ 0 σε κλιμακωτή μορφή ή ανοιγμένη κλιμακωτή)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{άρα rank(A) = 3}$$

- **2^{ος} τρόπος**:

  Με την μέγιστη σε τάξη ορίζουσα ≠ 0 (ελέγχουμε τις ελάσσονες ορίζουσες)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad |\mathrm{A}|=0 \;\; \text{ενώ} \;\; \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = 1 \neq 0, \;\; \text{άρα} \;\; \mathrm{rank(A)}=3$$

Άσκηση: Επαληθεύστε τα παραπάνω

Ασκήσεις

1. rank(I_3) = ;
2. rank(O) = ;
3. rank(I_n) = ;
4. Ποιο το rank(A) ; $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

   Αν η τελευταία γραμμή ήταν 1 1 0 1, ποιο το rank(A);

5. Ποιο το rank(A) ; $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Υπόδειξη: Προσπαθήστε να την φέρετε με ΣΜΓ σε 'Ανοιγμένη κλιμακωτή μορφή'