Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα

10

10.1 Εισαγωγή στις Ιδιοτιμές

Δεδομένης μια τετραγωνικής μήτρας $\mathbf{A}$, ας θέσουμε την ακόλουθη ερώτηση: Υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{v}$ τέτοιο, ώστε το αποτέλεσμα $\mathbf{Av}$ του πολλαπλασιασμού του $\mathbf{v}$ με την μήτρα $\mathbf{A}$ να είναι απλά ένα βαθμωτό γινόμενό του $\mathbf{v}$; Άρα λοιπόν, η ερώτηση είναι κατά πόσο υπάρχει ή όχι έναν μη μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{v}$ *και* ένας αριθμός λ τέτοια ώστε

$$\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}. \qquad \textbf{(1)}$$

Στην Ενότητα 10.3 παρουσιάζουμε ενδιαφέρουσες εφαρμογές από τις οποίες προκύπτει αυτό το ερώτημα. Ο ορισμός που ακολουθεί μας δίνει την ορολογία που θα χρησιμοποιήσουμε για την Εξίσωση (1).

ΟΡΙΣΜΟΣ Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα

Ο αριθμός λ ονομάζεται **ιδιοτιμή** μιας $n \times n$ μήτρας $\mathbf{A}$ εάν υπάρχει ένα *μη μηδενικό* διάνυσμα $\mathbf{v}$ τέτοιο ώστε

$$\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}. \qquad \textbf{(1)}$$

Σε αυτή την περίπτωση το διάνυσμα $\mathbf{v}$ ονομάζεται **ιδιοδιανύσμα** της μήτρας $\mathbf{A}$. Λέμε επίσης ότι το ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{v}$ **συνδέεται** με την ιδιοτιμή λ, ή ότι η ιδιοτιμή λ **αντίστοιχεί** με το ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{v}$.

Κάποιες φορές μπορεί να συναντήσουμε τις ιδιοτιμές με την ονομασία *κατάλληλες τιμές*, ενώ σε ορισμένα βιβλία οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα μπορεί επίσης να ονομάζονται *χαρακτηριστικές τιμές* και *χαρακτηριστικά διανύσματα*.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Θεωρήστε την 2×2 μήτρα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

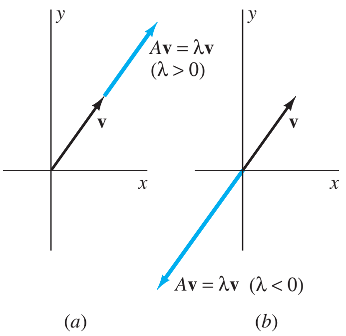
Αν $\mathbf{v} = (2, 1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}^T$, τότε

$$\mathbf{Av} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\mathbf{v}.$$

Έτσι, το $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}^T$ είναι ένα ιδιοδιανύσμα της $\mathbf{A}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 2$. Αν $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}^T$, τότε

$$\mathbf{Av} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 1\mathbf{v}.$$

Έτσι το $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}^T$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα της $\mathbf{A}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 1$. Συνοψίζοντας, βλέπουμε ότι οι αριθμοί $\lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = 1$ είναι και οι δύο ιδιοτιμές της μήτρας $\mathbf{A}$, με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα τα $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}^T$, αντίστοιχα.



ΣΧΗΜΑ 10.1.1 (α) Μια θετική ιδιοτιμή· (β) μια αρνητική ιδιοτιμή.

Οι ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα έχουν απλή γεωμετρική ερμηνεία. Υποθέστε ότι το λ είναι μια ιδιοτιμή της μήτρας $\mathbf{A}$ με αντίστοιχο ιδιοδιανυσμα $\mathbf{v}$, έτσι ώστε $\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}$. Τότε το μήκος $|\mathbf{Av}|$ του διανύσματος $\mathbf{Av}$ είναι $\pm\lambda|\mathbf{v}|$, ανάλογα με το πρόσημο του λ. Έτσι, αν $\lambda > 0$, τότε πολλαπλασιάζοντας με $\mathbf{v}$ την μήτρα $\mathbf{A}$ διαστέλλεται ή συστέλλεται το διάνυσμα $\mathbf{v}$ κατά την διεύθυνσή του. Αν $\lambda < 0$, τότε πολλαπλασιάζοντας με $\mathbf{v}$ την $\mathbf{A}$ αντιστρέφεται η κατεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{v}$ (βλέπε Σχήμα. 10.1.1).

Παρατήρηση 1 Αν $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, τότε η εξίσωση $\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}$ ισχύει για κάθε αριθμό λ και ως εκ τούτου, είναι άνευ σημασίας. Αυτός άλλωστε είναι ο λόγος για τον οποίο μόνο *μη μηδενικά* διανύσματα ορίζονται ως ιδιοδιανύσματα.

Παρατήρηση 2 Έστω ότι λ είναι μια ιδιοτιμή και $\mathbf{v}$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα μιας μήτρας $\mathbf{A}$. Αν k είναι ένας οποιοσδήποτε μη μηδενικός αριθμός και $\mathbf{u} = k\mathbf{v}$, τότε

$$\begin{aligned} \mathbf{Au} &= \mathbf{A}(k\mathbf{v}) = k(\mathbf{Av}) \\ &= k(\lambda\mathbf{v}) = \lambda(k\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u}, \end{aligned}$$

άρα το $\mathbf{u} = k\mathbf{v}$ είναι επίσης ένα ιδιοδιανύσμα που αντιστοιχεί στο λ. Έτσι, *κάθε μη μηδενικό πολλαπλάσιο ενός ιδιοδιανύσματος είναι επίσης ιδιοδιάνυσμα και αντιστοιχεί στην ίδια ιδιοτιμή*. Στο Παράδειγμα 1, για παράδειγμα, $\mathbf{u}_1 = -3\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -6 & -3 \end{bmatrix}^T$ είναι ένα ιδιοδιανύσμα που αντιστοιχεί στην $\lambda_1 = 2$, και $\mathbf{u}_2 = 4\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 12 & 8 \end{bmatrix}^T$ είναι ένα άλλο ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην $\lambda_2 = 1$.

Χαρακτηριστική Εξίσωση

Τώρα θα εξετάσουμε το πρόβλημα της εύρεσης των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων μιας $n \times n$ τετραγωνικής μήτρας $\mathbf{A}$. Σύμφωνα με τον ορισμό, ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{v}$ είναι ιδιοδιάνυσμα της $\mathbf{A}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ όταν

$$\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v} = \lambda\mathbf{Iv};$$

δηλαδή, όταν

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}. \qquad \textbf{(2)}$$

Για μια σταθερή τιμή του λ, η Εξίσωση (2) είναι ένα ομογενές γραμμικό σύστημα με n εξισώσεις και αγνώστους τις n συντεταγμένες του $\mathbf{v}$. Από το Θεώρημα 2 της Ενότητας 8.6 και το Θεώρημα 7 της Ενότητας 8.5, αυτό το σύστημα έχει μη τετριμμένες λύσεις $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ αν και μόνο αν η ορίζουσα

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}|$$

των συντελεστών της μήτρας είναι *μηδέν*. Η εξίσωση $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$ ονομάζεται **χαρακτηριστική εξίσωση** της τετραγωνικής μήτρας $\mathbf{A}$, και έχουμε αποδείξει ότι υπάρχει ιδιοδιανύσμα $\mathbf{v}$ που αντιστοιχεί στο λ αν και μόνο αν το λ ικανοποιεί αυτή την εξίσωση.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 Η Χαρακτηριστική Εξίσωση

Ο αριθμός λ είναι μια ιδιοτιμή της $n \times n$ μήτρας $\mathbf{A}$ αν και μόνο αν ο λ ικανοποιεί την χαρακτηριστική εξίσωση

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0. \qquad \textbf{(3)}$$

Τώρα ας δούμε τι είδους εξίσωση είναι η εξίσωση (3) του χαρακτηριστικού πολυωνύμου. Παρατηρήστε ότι η μήτρα.

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} \tag{4}$$

προσδιορίζεται απλά αφαιρώντας λ από κάθε διαγώνιο στοιχείο της $\mathbf{A}$. Αν υπολογίσουμε την ορίζουσα $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}|$ θα δούμε ότι είναι *πολυωνυμική* με μεταβλητή το λ, και ότι η μεγαλύτερη δύναμη του λ προκύπτει από το γινόμενο των διαγώγώνιων στοιχείων της μήτρας (4). Επομένως η χαρακτηριστική εξίσωση μιας $n \times n$ μήτρας $\mathbf{A}$ έχει την μορφή

$$(-1)^n\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0 = 0, \tag{5}$$

δηλαδή μια πολυώνυμική εξίσωση του λ βαθμού n.

Σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας, κάθε πολυωνυμική εξίσωση n βαθμού μιας μεταβλητής έχει n λύσεις (μετρώντας και τις πολλαπλές), αλλά κάποιες από αυτές μπορεί να είναι μιγαδικές. Έτσι, μπορούμε να πούμε ότι *μια $n \times n$ μήτρα $\mathbf{A}$ έχει πάντα n ιδιοτιμές*, αν και μπορεί να μην είναι διακεκριμένες και επίσης μπορεί να μην είναι όλες πραγματικές. Σε αυτό το κεφάλαιο θα περιορίσουμε την προσοχή μας κυρίως στις πραγματικές ιδιοτιμές, αλλά πρέπει να τονίσουμε τη σπουδαιότητα των μιγαδικών ιδιοτιμών στην επίλυση συστημάτων διαφορικών εξισώσεων.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα

Για να βρούμε τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα μιας $n \times n$ μήτρας $\mathbf{A}$:

1. Πρώτα λύνουμε την χαρακτηριστική εξίσωση
$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0.$$
2. Στην συνέχεια, για *κάθε* ιδιοτιμή λ που βρήκαμε, λύνουμε το γραμμικό σύστημα
$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$$
για να βρούμε τα αντίστοιχα του λ ιδιοδιανύσματα.

Το να λύσουμε την χαρακτηριστική εξίσωση δεν είναι πάντα εύκολο. Στα Παραδείγματα και στα Προβλήματα που ακολουθούν, έχουμε διαλέξει μήτρες των οποίων το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}|$ είναι γινόμενο παραγόντων των ιδιοτιμών τους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα της μήτρας

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Λύση Εδώ

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 5-\lambda & 7 \\ -2 & -4-\lambda \end{bmatrix}, \tag{6}$$

έτσι η χαρακτηριστική εξίσωση της $\mathbf{A}$ είναι

$$\begin{aligned} 0 &= |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| \\ &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & 7 \\ -2 & -4-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (5-\lambda)(-4-\lambda) - (-2)(7) \\ &= (\lambda-5)(\lambda+4) + 14 = \lambda^2 - \lambda - 6; \end{aligned}$$

δηλαδή, $(\lambda + 2)(\lambda - 3) = 0$. έτσι, η μήτρα $\mathbf{A}$ έχει δύο ιδιοτιμές τις -2 και 3. Για να τις διακρίνουμε θέτουμε $\lambda_1 = -2$ και $\lambda_2 = 3$. Για να βρούμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα, αντικαθιστούμε *ξεχωριστά* κάθε ιδιοτιμή στην (6) και λύνουμε το σύστημα που προκύπτει $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Περίπτωση **1:** $\boldsymbol{\lambda_1 = -2}$. Με $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T$, το σύστημα $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ γίνεται

$$\begin{bmatrix} 7 & 7 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Κάθε μια από τις δύο εξισώσεις είναι πολλαπλάσιο της εξίσωσης $x + y = 0$, και κάθε μη μηδενική λύση $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T$ αυτής της εξίσωσης είναι μη μηδενικό πολλαπλάσιο του $\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$. Έτσι το μόνο ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = -2$ είναι $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$.

Περίπτωση **2:** $\boldsymbol{\lambda_2 = 3}$. Με $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T$, το σύστημα $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ είναι

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -2 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Και εδώ, έχουμε μια μόνο εξίσωση, την $2x + 7y = 0$ και οποιαδήποτε μη μηδενική λύση της, αρκεί. Για $y = -2$ έχουμε $x = 7$, έτσι (πολλαπλασιάζοντας με μια σταθερά) το μόνο ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 3$ είναι το $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 7 & -2 \end{bmatrix}^T$.

Τελικά, ας σημειώσουμε ότι δεν είναι αρκετό, απλά να πούμε ότι η δοσμένη μήτρα $\mathbf{A}$ έχει για ιδιοτιμές τις -2 και 3 και για ιδιοδιανύσματα τα $\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$ και $\begin{bmatrix} 7 & -2 \end{bmatrix}^T$. Για να έχουμε την πλήρη εικόνα θα πρέπει να λέμε πιο ιδιοδιάνυσμα αντίστοιχεί σε ποια ιδιοτιμή.

Αν τα στοιχεία μιας μήτρας $\mathbf{A}$ είναι όλα πραγματικοί αριθμοί, τότε είναι πραγματικοί και όλοι οι συντελεστές της χαρακτηριστικής εξίσωσης $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$. Στην περίπτωση αυτή προκύπτει ότι οι μιγαδικές ιδιοτιμές (εάν υπάρχουν) της μήτρας $\mathbf{A}$ εμφανίζονται μόνο σε συζυγή ζευγάρια. Στο επόμενο παράδειγμα παρουσιάζουμε την περίπτωση φανταστικών ή μιγαδικών ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Η χαρακτηριστική εξίσωση της μήτρας

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

είναι

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} -\lambda & 8 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 16 = 0.$$

Έτσι η μήτρα $\mathbf{A}$ έχει τις συζυγείς μιγαδικές ιδιοτιμές $\lambda = \pm 4i$.

Περίπτωση **1:** $\boldsymbol{\lambda_1 = -4i}$. Με $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T$, το σύστημα $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ είναι

$$\begin{bmatrix} 4i & 8 \\ -2 & 4i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Η πρώτη εξίσωση, $4ix+8y = 0$, είναι $-2i$ φορές η δεύτερη και, προφανώς, ικανοποιείται από τα $x = 2i$, $y = 1$. Έτσι, το $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2i & 1 \end{bmatrix}^T$ είναι ένα μιγαδικό ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην μιγαδική ιδιοτιμή $\lambda_1 = -4i$.

Περίπτωση**2:** $\boldsymbol{\lambda_2 = +4i}$. Σε αυτή την περίπτωση, μπορείτε να ελέγξετε παρόμοια ότι ο συζυγής $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2i & 1 \end{bmatrix}^T$ του $\mathbf{v}_1$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί με την συζυγή λ_2 της ιδιοτιμής λ_1. Έτσι οι μιγαδικές συζυγείς ιδιοτιμές $\mp 4i$ της μήτρας $\mathbf{A}$ αντιστοιχούν σε συζυγή μιγαδικά ιδιοδιανύσματα $\begin{bmatrix} \pm 2i & 1 \end{bmatrix}^T$ (διατηρώντας το πρόσημο που εμφανίζεται).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Η 2×2 ταυτοτική μήτρα $\mathbf{I}$ έχει την χαρακτηριστική εξίσωση

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 = 0,$$

έτσι η $\mathbf{I}$ έχει μια μόνο ιδιοτιμή, την $\lambda = 1$. Η εξίσωση $(\mathbf{I} - 1\lambda)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ είναι

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

έτσι *κάθε* μη μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T$ είναι ιδιοδιάνυσμα της $\mathbf{I}$. Συγκεκριμένα, η μοναδική ιδιοτιμή $\lambda = 1$ αντιστοιχεί σε *δυο* γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, το $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ και το $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 Η χαρακτηριστική εξίσωση της μήτρας

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

είναι $(2 - \lambda)^2 = 0$, έτσι η $\mathbf{A}$ έχει μια μοναδική ιδιοτιμη, την $\lambda = 2$. Η εξίσωση $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ δίνει

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Επομένως, το x είναι αυθαίρετο, αλλά το $y = 0$, και έτσι η ιδιοτιμη $\lambda = 2$ αντιστοιχεί (πολλαπλασιασμό μιας σταθεράς) στο μοναδικό ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$.

Στα Παραδείγματα 2–5 βλέπουμε τις τέσσερις πιθανότητες για μια 2×2 μήτρα $\mathbf{A}$.Έτσι η $\mathbf{A}$ μπορεί να έχει

- δύο διακεκριμένες πραγματικές ιδιοτιμές, κάθε μία από τις οποίες αντιστοιχεί σε ένα μοναδικό ιδιοδιάνυσμα,
- μια μόνο πραγματική ιδιοτιμή, η οποία αντιστοιχεί σε ένα μόνο ιδιοδιάνυσμα,
- μια μόνο ιδιοτιμή, η οποία αντιστοιχεί σε δύο γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, ή
- δύο συζυγείς μιγαδικές ιδιοτιμές οι οποίες αντιστοιχούν σε δύο συζυγή μιγαδικά ιδιοδιανύσματα.

Η χαρακτηριστική εξίσωση μιας 3×3 μήτρας, σύμφωνα με τη Εξίσωση (5), είναι της μορφής

$$-\lambda^3 + c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0 = 0. \tag{7}$$

Η τιμή της συνεχούς συνάρτησης $-\lambda^3 + sb + c_0$ στο αριστερό μέρος πλησιάζει στο $+\infty$ καθώς το $\lambda \to -\infty$ και στο $-\infty$ καθώς $\lambda \to +\infty$. Έτσι κάθε τέτοια κυβική εξίσωση έχει τουλάχιστον μια πραγματική λύση,άρα κάθε 3×3 μήτρα έχει (σε αντίθεση με τις 2×2 μήτρες) τουλάχιστον μια πραγματική ιδιοτιμή. Μια 3×3 μήτρα μπορεί να έχει μια, δύο, ή και τρεις διακεκριμένες ιδιοτιμές, και η μοναδική ιδιοτιμή μιας 3×3 μήτρας μπορεί να αντιστοιχεί σε ένα, δύο ή τρία γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Στα επόμενα δύο παραδείγματα αυτής της ενότητας θα δούμε ορισμένες από αυτές τις πιθανότητες. Στο επόμενο παράδειγμα βλέπουμε επίσης ότι, ενώ το μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{0}$ δεν μπορεί να είναι ιδιοδιάνυσμα μήτρας, η τιμή $\lambda = 0$ μπορεί να είναι ιδιοτιμή.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 Βρείτε τις ιδιοτιμές και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα της μήτρας

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & 2 \\ 16 & -15 & -5 \end{bmatrix}.$$

Λύση Η μήτρα $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ είναι

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ -4 & 6-\lambda & 2 \\ 16 & -15 & -5-\lambda \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα ως προς τα στοιχεία της πρώτης γραμμής, έχουμε

$$\begin{aligned} |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| &= (3-\lambda)[(6-\lambda)(-5-\lambda) + 30] \\ &= (3-\lambda)(\lambda^2 - \lambda) = \lambda(\lambda-1)(3-\lambda). \end{aligned}$$

Έτσι η χαρακτηριστική εξίσωση $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}| = 0$ δίνει τρεις ιδιοτιμές, τις $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, και $\lambda_3 = 3$. Για να βρούμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα, πρέπει να λύσουμε το σύστημα $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ξεχωριστά για κάθε μία ιδιοτιμή.

Περίπτωση **1: $\boldsymbol{\lambda_1 = 0}$.** Έστω $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T$ και αντικαθιστούμε με $\lambda = 0$ στην μήτρα των συντελεστών της (8) οπότε έχουμε έχουμε το σύστημα

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & 2 \\ 16 & -15 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Από την πρώτη εξίσωση την $3x = 0$, προκύπτει ότι $x = 0$. Καθεμία από τις δύο εξισώσεις που απομένουν είναι πολλαπλάσιο τις εξίσωσης $3y + z = 0$. Η επιλογή $y = 1$ δίνει $z = -3$. Έτσι το ιδιοδιανύσμα $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}^T$ είναι αυτό που συνδέεται με την $\lambda_1 = 0$.

Περίπτωση **2: $\boldsymbol{\lambda_2 = 1}$.** Αντικαθιστώντας με $\lambda = 1$ στην μήτρα των συντελεστών στην (8) έχουμε το σύστημα

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & 2 \\ 16 & -15 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

για $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T$. Η πρώτη εξίσωση $2x = 0$ δίνει ότι $x = 0$. Τότε η τρίτη εξίσωση είναι πολλαπλάσιο της δεύτερης εξίσωσης, $5y + 2z = 0$. Η επιλογή $y = 2$ δίνει $z = -5$, έτσι το ιδιοδιανύσμα $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -5 \end{bmatrix}^T$ είναι αυτό που συνδέεται με την $\lambda_2 = 1$.

Περίπτωση **3: $\boldsymbol{\lambda_3 = 3}$.** Αντικαθιστώντας $\lambda = 3$ στην μήτρα των συντελεστών στην (8) έχουμε το σύστημα

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 2 \\ 16 & -15 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Σε αυτή την περίπτωση, η πρώτη εξίσωση δεν δίνει καμία πληροφορία, αλλά αν προσθέσουμε 4 φορές την δεύτερη εξίσωση στην τρίτη, το απότέλεσμα είναι $-3y = 0$, έτσι $y = 0$. Κατά συνέπεια η δεύτερη και η τρίτη εξίσωση είναι και οι δύο πολλαπλάσια της εξίσωσης $2x-z = 0$. Η επιλογή $x = 1$ δίνει $z = 2$, έτσι το ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T$ αντιστοιχεί στην $\lambda_3 = 3$.

Περιληπτικά, βρήκαμε τα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -5 \end{bmatrix}^T$, και $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T$ που συνδέονται με τις διακεκριμένες ιδιοτιμές $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, και $\lambda_3 = 3$, αντίστοιχα.

Παρατηρήσεις Αντικαθιστώντας $\lambda = 0$ στην χαρακτηριστική εξίσωση $|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}| = 0$ έχουμε ότι $|\mathbf{A}| = 0$. Έτσι η $\lambda = 0$ είναι μια ιδιοτιμή της μήτρας $\mathbf{A}$ αν και μόνο αν η $\mathbf{A}$ είναι ιδιάζουσα, δηλαδή $|\mathbf{A}| = 0$.

Ιδιόχωροι

Έστω λ μια ιδιοτιμή μιας $n \times n$ μήτρας $\mathbf{A}$. Τότε το σύνολο όλων των ιδιοδιανυσμάτων της $\mathbf{A}$ είναι το σύνολο όλων των μη μηδενικών λύσεων του συστήματος

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}. \qquad \textbf{(9)}$$

Ο χώρος των λύσεων αυτού του συστήματος ονομάζεται **ιδιόχωρος** της $\mathbf{A}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ. Αυτός ο υπόχωρος του $\mathbf{R}^n$ περιλαμβάνει όλα τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην λ *μαζί και το μηδενικό διάνυσμα.* Στο Παράδειγμα 6 βρήκαμε (με πολλαπλασιασμό μιας σταθεράς) ότι μόνο ένα ιδιοδιάνυσμα αντιστοιχεί σε κάθε μια ιδιοτιμή λ, σε αυτή την περίπτωση ο ιδιόχωρος της λ είναι μονοδιάστατος. Στην περίπτωση ενός ιδιόχωρου μεγαλύτερης διάστασης, θέλουμε γενικά να βρούμε μια βάση του χώρου των λύσεων της Εξίσωσης (9).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7 Βρείτε βάσεις για τους ιδιόχωρους της μήτρας

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Λύση Εδώ έχουμε

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 4-\lambda & -2 & 1 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 2 & -2 & 3-\lambda \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Αναπτύσσουμε ως προς την πρώτη γραμμή και έχουμε

$$\begin{aligned} |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| &= (4-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) - (-2)(4 - 2\lambda) + (1)(-4 + 2\lambda) \\ &= -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12. \end{aligned}$$

Άρα, για να βρούμε τις ιδιοτιμές χρειάζεται να λύσουμε την κυβική εξίσωση

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 = 0. \tag{11}$$

Ελπίζουμε να βρούμε ακέραιες λύσεις. Το θεώρημα της παραγοντοίησης μας λέει ότι αν μια πολυωνυμική εξίσωση

$$\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0 = 0$$

με ακέραιους συντελεστές και συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου το 1 έχει μια ακέραια λύση, τότε η λύση αυτή είναι διαιρέτης της σταθεράς c_0. Στην περίπτωση της κυβικής εξίσωσης (11), οι πιθανές τέτοιες λύσεις είναι ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, και ± 12. Αντικαθιστούμε αυτούς τους αριθμούς διαδοχικά στην (11) και από αυτό βρίσκουμε ότι οι $+1$ και -1 δεν είναι λύσεις αλλά ότι η $\lambda = +2$ είναι μια λύση. Έτσι $\lambda - 2$ είναι ένας παράγοντας του κυβικού πολυωνύμου στην (11). Στην συνέχεια, από την διαίρεση

$$\begin{array}{r|l} & \lambda^2 - 5\lambda + 6 \\ \hline \lambda - 2 & \lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 \\ & \lambda^3 - 2\lambda^2 \\ \hline & \quad -5\lambda^2 + 16\lambda - 12 \\ & \quad -5\lambda^2 + 10\lambda \\ \hline & \qquad\qquad 6\lambda - 12 \\ & \qquad\qquad 6\lambda - 12 \\ \hline & \qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 &= (\lambda - 2)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) \\ &= (\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda - 3) \\ &= (\lambda - 2)^2(\lambda - 3). \end{aligned}$$

έτσι τελικά βλέπουμε ότι η μήτρα $\mathbf{A}$ έχει μια επαναλαμβανόμενη ιδιοτιμή, την $\lambda = 2$ και την ιδιοτιμή $\lambda = 3$.

Περίπτωση **1:** $\boldsymbol{\lambda = 2}$. Το σύστημα $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ είναι

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με την εξίσωση $2x - 2y + z = 0$, η οποία προφανώς έχει δισδιάστατο χώρο λύσεων. Με $y = 1$ και $z = 0$, έχουμε $x = 1$ και έτσι βρίσκουμε το ιδιοδιάνυσμα της βάσης $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$. Με $y = 0$ και $z = 2$, έχουμε $x = -1$ και έτσι έχουμε ένα άλλο ιδιοδιάνυσμα της βάσης $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T$. Ο δισδιάστατος ιδιόχωρος της $\mathbf{A}$ που αντιστοιχεί στην επαναλαμβανόμενη ιδιοτιμή $\lambda = 2$ έχει βάση την $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

Περίπτωση **2:** $\boldsymbol{\lambda = 3}$. Το σύστημα $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ είναι

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Από την τελευταία εξίσωση έχουμε ότι $x = y$, οπότε οι δύο πρώτες εξισώσεις μας δίνουν $x = y = z$. Από αυτό προκύπτει ότι ο ιδιόχωρος της $\mathbf{A}$ που αντιστοιχεί στην $\lambda = 3$ είναι μονοδιάστατος και έχει το $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ ως βάση ιδιοδιανυσμάτων.

Παρατήρηση Γενικά τα πολυώνυμα υψηλού βαθμού δεν είναι τόσο εύκολο να παραγοντοποιηθούν όσο αυτό του Παραδείγματος 7. Έτσι πολλές φορές για την επίλυση της χαρακτηριστικής εξίσωσης εφαρμόζονται αριθμητικές τεχνικές όπως αυτή του Νεύτωνα. Επιπλέον, για μια $n \times n$ μήτρα με n μεγαλύτερο του 4, το πλήθος των πράξεων που χρειάζεται για να υπολογίσουμε την χαρακτηριστική εξίσωση από την ορίζουσα $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}|$ είναι μάλλον απαγορευτικό, καθώς η παρουσία της μεταβλητής λ δεν επιτρέπει στις γραμμές και τις στήλες της κλιμακοποίησης να λειτουργήσουν με τον ίδιο τρόπο όπως με τους αριθμούς. Κατά συνέπεια χρειάζονται εξειδικευμένες τεχνικές, πέρα από τους σκοπούς της παρούσας συζήτησης, για να βρούμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα μεγάλων μητρών που εμφανίζονται σε αρκετές εφαρμογές. Στα Προβλήματα 40 και 41 στο τέλος αυτής της ενότητας παρουσιάζεται μια αριθμητική μέθοδος που είναι πολλές φορές χρήσιμη για μήτρες μεσαίου μεγέθους.

10.1 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Στα Προβλήματα 1 έως 26, βρείτε τις (πραγματικές) ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα της μήτρας $\mathbf{A}$. *Βρείτε μια βάση για κάθε ιδιόχωρο διάστασης 2 η μεγαλύτερης.*

1. $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ 3. $\begin{bmatrix} 8 & -6 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ 5. $\begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$ 6. $\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 10 & -8 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$ 8. $\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 12 & -10 \end{bmatrix}$ 9. $\begin{bmatrix} 8 & -10 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 9 & -10 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ 11. $\begin{bmatrix} 19 & -10 \\ 21 & -10 \end{bmatrix}$ 12. $\begin{bmatrix} 13 & -15 \\ 6 & -6 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ **14.** $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & -2 \\ -2 & 12 & 6 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ **16.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ **18.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 8 & 2 \\ 12 & -15 & -3 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 3 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **20.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 7 & 2 \\ 10 & -15 & -4 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ **22.** $\begin{bmatrix} 5 & -6 & 3 \\ 6 & -7 & 3 \\ 6 & -6 & 2 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ **24.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

25. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ **26.** $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

Βρείτε τις μιγαδικές ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα για τις μήτρες των Προβλήματων 27 έως 32.

27. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ **28.** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$

29. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 12 & 0 \end{bmatrix}$ **30.** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -12 \\ 12 & 0 \end{bmatrix}$

31. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 24 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$ **32.** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 36 & 0 \end{bmatrix}$

33. Υποθέστε ότι λ είναι μια ιδιοτιμή της μήτρας $\mathbf{A}$ με αντίστοιχο ιδιοδιανύσμα $\mathbf{v}$ και ότι n είναι θετικός ακέραιος. Δείξτε ότι η λ^n είναι μια ιδιοτιμή της $\mathbf{A}^n$ με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{v}$.

34. Δείξτε ότι η λ είναι μια ιδιοτιμή της αντιστρέψιμης μήτρας $\mathbf{A}$ αν και μόνο αν λ^{-1} είναι μια ιδιοτιμή της $\mathbf{A}^{-1}$. Είναι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα τα ίδια·

35. (α΄) Υποθέστε ότι $\mathbf{A}$ είναι μια τετραγωνική μήτρα. Χρησιμοποιήστε την χαρακτηριστική εξίσωση για να δείξετε ότι $\mathbf{A}$ και $\mathbf{A}^T$ έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

(β΄) Δώστε ένα παράδειγμα μιας 2×2 μήτρας $\mathbf{A}$ τέτοιας ώστε η $\mathbf{A}$ και η $\mathbf{A}^T$ να μην έχουν τα ίδια ιδιοδιανύσματα.

36. Δείξτε ότι οι ιδιοτιμές μιας τριγωνικής $n \times n$ μήτρας είναι τα διαγώνια στοιχεία της.

37. Υποθέστε ότι η χαρακτηριστική εξίσωση $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$ γράφεται ως πολυωνυμική εξισωση [Εξίσωση (5)]. Δείξτε ότι ο σταθερός όρος είναι $c_0 = \det\mathbf{A}$. *Υπόδειξη*: Αντικαταστήστε μια κατάλληλη τιμή για το λ.

38. Αν $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$ είναι μια $n \times n$ μήτρα, τότε το **ίχνος** $\operatorname{Tr}\mathbf{A}$ της $\mathbf{A}$ ορίζεται ως

$$\operatorname{Tr}\mathbf{A} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn},$$

δηλαδή το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων της $\mathbf{A}$. Μπορεί να αποδειχθεί ότι ο συντελεστής του λ^{n-1} στην Εξίσωση (5) είναι $c_{n-1} = (-1)^{n-1}(\operatorname{Tr}\mathbf{A})$. Δείξτε ότι αυτό ισχύει στην περίπτωση μιας 2×2 μήτρας.

39. Υποθέστε ότι μια $n\times n$ μήτρα $\mathbf{A}$ έχει n (πραγματικές) ιδιοτιμές τις $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Υποθέστε ότι το γενικό συμπέρασμα του Προβλήματος 38 ισχύει και αποδείξτε ότι

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n &= \operatorname{Tr}\mathbf{A}\\ &= a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.\end{aligned}$$

40. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα των Προβλημάτων 37 και 38, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$p(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}|$$

μιας 3×3 μήτρας $\mathbf{A}$ δίνεται από την σχέση

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + (\operatorname{Tr}\mathbf{A})\lambda^2 + c_1\lambda + (\det\mathbf{A}).$$

Ο εναπομένων συντελεστής c_1 μπορεί να υπολογιστεί αντικαθιστώντας με $\lambda = 1$ και στη συνέχεια υπολογίζοντας τις δύο ορίζουσες $|\mathbf{A}|$ και $p(1) = |\mathbf{A} - \mathbf{I}|$. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο αυτή για να βρείτε τη χαρακτηριστική εξίσωση, τις ιδιοτιμές, και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα της μήτρας

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 32 & -67 & 47\\ 7 & -14 & 13\\ -7 & 15 & -6\end{bmatrix}.$$

41. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα των Προβλημάτων 37 και 38, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$p(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}|$$

μιας 4×4 μήτρας $\mathbf{A}$ δίνεται από την σχέση

$$p(\lambda) = \lambda^4 - (\operatorname{Tr}\mathbf{A})\lambda^3 + c_2\lambda^2 + c_1\lambda + (\det\mathbf{A}).$$

Οι εναπομένοντες συντελεστές c_1 και c_2 μπορεί να υπολογιστούν αντικαθιστώντας με $\lambda = \pm 1$ και υπολογίζοντας τις τρεις ορίζουσες $|\mathbf{A}|$, $p(1) = |\mathbf{A}-\mathbf{I}|$, και $p(-1) = |\mathbf{A}+\mathbf{I}|$. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο αυτή για να βρείτε τη χαρακτηριστική εξίσωση, τις ιδιοτιμές, και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα της μήτρας

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 22 & -9 & -8 & -8\\ 10 & -7 & -14 & 2\\ 10 & 0 & 8 & -10\\ 29 & -9 & -3 & -15\end{bmatrix}.$$

42. Συνδυάστε τις ιδέες των Προβλημάτων 37–40 για να δείξετε ότι

(α΄) Αν $\mathbf{A}$ είναι μια 2×2 μήτρα τότε $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (-\lambda)^2 + \operatorname{Tr}(\mathbf{A})(-\lambda) + \det(\mathbf{A})$.

(β΄) Αν $\mathbf{A}$ είναι μια 3×3 μήτρα τότε $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (-\lambda)^3 + \operatorname{Tr}(\mathbf{A})(-\lambda)^2 + c_1(-\lambda) + \det(\mathbf{A})$, όπου c_1 είναι το άθροισμα των ελασσόνων οριζουσών των διαγώνιων στοιχείων της $\mathbf{A}$. (Θυμηθείτε από την Ενότητα 8.6 την διαφορά μεταξύ ελάσσονας ορίζουσας και προσημασμένης ορίζουσας.)

10.2 Διαγωνιοποίηση Μητρών

Έστω μια $n\times n$ μήτρα $\mathbf{A}$, μπορούμε να ρωτήσουμε *πόσα* γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα έχει η μήτρα $\mathbf{A}$. Στην Ενότητα 10.1, είδαμε αρκετά παραδείγματα (για $n = 2$ και $n = 3$) στα οποία μια $n\times n$ μήτρα $\mathbf{A}$ έχει n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα—τον μεγαλύτερο δυνατόν αριθμό. Αντίθετα, στο Παράδειγμα 5 της Ενότητας 10.1, είδαμε ότι μια 2×2 μήτρα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

έχει μία μόνο ιδιοτιμή $\lambda = 2$ που αντιστοιχεί σε ένα μόνο ιδιοδιάνυσμα, το $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0\end{bmatrix}^T$.

Όταν μια $n\times n$ μήτρα $\mathbf{A}$ έχει πράγματι n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα γίνεται κάτι πολύ ενδιαφέρον. Υποθέστε ότι οι ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (όχι απαραίτητα διακεκριμένες) της $\mathbf{A}$ αντιστοιχούν στα n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, αντίστοιχα. Έστω

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} | & | & & |\\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n\\ | & | & & |\end{bmatrix} \qquad \textbf{(1)}$$

η $n \times n$ μήτρα η οποία έχει αυτά τα ιδιοδιανύσματα ως διανύσματα *στήλες*. Τότε

$$\mathbf{AP} = \mathbf{A}\begin{bmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{Av}_1 & \mathbf{Av}_2 & \cdots & \mathbf{Av}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

και έτσι

$$\mathbf{AP} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \lambda_1\mathbf{v}_1 & \lambda_2\mathbf{v}_2 & \cdots & \lambda_n\mathbf{v}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}, \tag{2}$$

επειδή $\mathbf{Av}_j = \lambda_j\mathbf{v}_j$ για κάθε $j = 1, 2, \ldots, n$. Επομένως, το γινόμενο των μητρών $\mathbf{AP}$ έχει τα διανύσματα στήλη $\lambda_1\mathbf{v}_1, \lambda_2\mathbf{v}_2, \ldots, \lambda_n\mathbf{v}_n$. Τώρα ας θεωρήσουμε την διαγώνια μήτρα

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}, \tag{3}$$

της οποίας τα διαγώνια στοιχεία είναι οι αντίστοιχες ιδιοτιμές (με την ίδια σειρά) των ιδιοδιανυσμάτων που σχηματίζουν τις στήλες της $\mathbf{P}$. Τότε

$$\mathbf{PD} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \lambda_1\mathbf{v}_1 & \lambda_2\mathbf{v}_2 & \cdots & \lambda_n\mathbf{v}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}, \tag{4}$$

επειδή το γινόμενο της i-οστης γραμμής της $\mathbf{P}$ και της j στήλης της $\mathbf{D}$ είναι απλά το γινόμενο της λ_j και του i-οστου στοιχείου του $\mathbf{v}_j$. Τελικά, εάν συγκρίνουμε τα αποτελέσματα των (2) και (4), βλέπουμε ότι

$$\mathbf{AP} = \mathbf{PD}. \tag{5}$$

Αλλά η μήτρα $\mathbf{P}$ είναι αντιστρέψιμη, επειδή τα n διανύσματα στήλες είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Έτσι μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε από δεξιά με $\mathbf{P}^{-1}$ και να έχουμε

$$\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}. \tag{6}$$

Η Εξίσωση (6) εκφράζει την $n \times n$ μήτρα $\mathbf{A}$ που έχει n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα με όρους της *μήτρας των ιδιοδιανυσμάτων* $\mathbf{P}$ και της διαγώνιας *μήτρας των ιδιοτιμών* $\mathbf{D}$. Μπορεί να γραφεί και ως $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$, αλλά η μορφή που πρέπει να θυμάστε είναι αυτή της (6).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Στο Παράδειγμα 1 της Ενότητας 10.1 είδαμε ότι η μήτρα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

έχει για ιδιοτιμές τις $\lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = 1$ και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα το $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}^T$ και $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}^T$, αντιστοίχως. Τότε

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{και} \quad \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Επομένως

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1} &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}, \end{aligned}$$

που συμφωνεί με την Εξίσωση (6).

Ομοιότητα και Διαγωνιοποίηση

Ο ακόλουθος ορισμός εκφράζει επακριβώς την σχέση (6) ανάμεσα στην αρχική μήτρα $\mathbf{A}$ και την διαγώνια μήτρα $\mathbf{D}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ Όμοιες Μήτρες
Δύο $n \times n$ μήτρες $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ ονομάζονται **όμοιες** εφόσον υπάρχει μια αντιστρέψιμη μήτρα $\mathbf{P}$ τέτοια ώστε

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}. \tag{7}$$

Σημειώστε ότι αυτή η σχέση μεταξύ των $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ είναι συμμετρική, καθώς αν $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$, τότε $\mathbf{A} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{Q}$ για κάποια αντιστρέψιμη μήτρα $\mathbf{Q}$—απλά θεωρήστε ότι $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1}$.

Μια $n \times n$ μήτρα $\mathbf{A}$ ονομάζεται **διαγωνιοποιήσιμη** εάν είναι όμοια με μια διαγώνια μήτρα $\mathbf{D}$, δηλαδή εάν υπάρχει μια διαγώνια μήτρα $\mathbf{D}$ και μια αντιστρέψιμη μήτρα $\mathbf{P}$ τέτοιες ώστε $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$, και έτσι

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}. \tag{8}$$

Η διαδικασία της εύρεσης της μήτρας $\mathbf{P}$ και της διαγώνιας μήτρας $\mathbf{D}$ στην (8) ονομάζεται **διαγωνιοποίηση** της μήτρας $\mathbf{A}$. Στο Παράδειγμα 1 δείξαμε ότι οι μήτρες

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

είναι όμοιες, άρα και η 2×2 μήτρα $\mathbf{A}$ είναι διαγωνιοποιήσιμη.

Τώρα αναζητούμε τις συνθήκες κάτω από τις οποίες μια τετραγωνική μήτρα είναι διαγωνιοποιήσιμη. Από την Εξίσωση (6), είδαμε ότι *αν* μια $n \times n$ μήτρα $\mathbf{A}$ έχει n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, *τότε* η $\mathbf{A}$ είναι διαγωνιοποιήσιμη. Ισχύει και το αντίστροφο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 Κριτήριο διαγωνιοποίησης
Μια $n \times n$ μήτρα $\mathbf{A}$ είναι διαγωνιοποιήσιμη αν και μόνο αν έχει n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα .

Απόδειξη Αρκεί μόνο να δείξουμε ότι, αν μια $n \times n$ μήτρα $\mathbf{A}$ είναι διαγωνιοποιήσιμη, τότε έχει n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Υποθέστε ότι η $\mathbf{A}$ είναι όμοια με τη διαγώνια μήτρα $\mathbf{D}$ με διαγώνια στοιχεία τα $d_1, d_2, \ldots, d_n$, και έστω ότι

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix}$$

είναι μια αντιστρέψιμη μήτρα τέτοια ώστε $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$. Τότε

$$\begin{aligned} \mathbf{AP} &= \mathbf{A}\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{v}_1 & \mathbf{A}\mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{A}\mathbf{v}_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

και

$$\mathbf{PD} = \begin{bmatrix} d_1\mathbf{v}_1 & d_2\mathbf{v}_2 & \cdots & d_n\mathbf{v}_n \end{bmatrix},$$

ουσιαστικά με τους ίδιους υπολογισμούς όπως στην Εξίσωση (4). Αλλά $\mathbf{AP} = \mathbf{PD}$ επειδή $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$, έτσι έχουμε ότι

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_j = d_j\mathbf{v}_j$$

για κάθε $j = 1, 2, \ldots, n$. Έτσι τα διανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ είναι ιδιοδιανύσματα της μήτρας $\mathbf{A}$ που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $d_1, d_2, \ldots, d_n$, αντίστοιχα. Και από το Θεώρημα 2 της Ενότητας 8.6 και το Θεώρημα 2 της Ενότητας 10.3 προκύπτει ότι αυτά τα n ιδιοδιανύσματα της μήτρας $\mathbf{A}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, επειδή είναι τα διανύσματα στήλης της αντιστρέψιμης μήτρας $\mathbf{P}$. ◆

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Είναι σημαντικό να θυμάστε όχι μόνο το γεγονός ότι μια $n \times n$ μήτρα $\mathbf{A}$ που έχει n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα είναι διαγωνοποιήσιμη, αλλά και τη σχέση διαγωνιοποίησης $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$ της Εξίσωσης (6), όπου η μήτρα $\mathbf{P}$ έχει τα n ιδιοδιανύσματα ως στήλες της, και οι αντίστοιχες ιδιοτιμές είναι τα διαγώνια στοιχεία της διαγώνιας μήτρας $\mathbf{D}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Στο Παράδειγμα 5 της Ενότητας 10.1 είδαμε ότι η μήτρα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

έχει μια μόνο ιδιοτιμή, τη $\lambda = 2$, και (με πολλαπλασιασμό μιας σταθεράς) μόνο το ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ αντιστοιχεί σαυτή την ιδιοτιμή. Έτσι η 2×2 μήτρα $\mathbf{A}$ *δεν* έχει $n = 2$ γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Έτσι από το Θεώρημα 1 έχουμε ότι η $\mathbf{A}$ δεν είναι διαγωνιοποιήσιμη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Στο Παράδειγμα 6 της Ενότητα 10.1 είδαμε ότι η μήτρα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & 2 \\ 16 & -15 & -5 \end{bmatrix}$$

έχει τις ακόλουθες ιδιοτιμές με τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα:

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 3: &\quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T \\ \lambda_2 = 1: &\quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -5 \end{bmatrix}^T \\ \lambda_3 = 0: &\quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}^T. \end{aligned}$$

Είναι προφανές (γιατί ·) ότι τα τρία ιδιοδιανύσματα $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, έτσι από το Θεώρημα 1 έχουμε ότι η 3×3 μήτρα $\mathbf{A}$ ειναι διαγωνιοποιήσιμη. Συγκεκριμένα, η αντίστροφη της μήτρας των ιδιοδιανυσμάτων

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & -3 \end{bmatrix}$$

είναι η

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -5 & -2 \end{bmatrix},$$

και η διαγώνια μήτρα είναι η

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Επομένως, η Εξίσωση (6) $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{D}$ δίνει τη διαγωνιοποίηση

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -5 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & 2 \\ 16 & -15 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & -3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

της μήτρας $\mathbf{A}$.

Το επόμενο θεώρημα αποδεικνύει ότι κάθε σύνολο από ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε *διακεκριμένες* ιδιοτιμές (όπως στο Παράδειγμα 3) είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διακεκριμένες Ιδιοτιμές

Υποθέστε ότι τα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ συνδέονται με τις διακεκριμένες ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ της μήτρας $\mathbf{A}$. Τότε αυτά τα k ιδιοδιανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Απόδειξη Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή για το k. Το θεώρημα ισχύει προφανώς για $k = 1$, επειδή κάθε μοναδικό (μη μηδενικό) ιδιοδιάνυσμα αποτελεί ένα γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο. Επαγωγικά υποθέτουμε ότι οποιοδήποτε σύνολο από $k - 1$ ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διακεκριμένες ιδιοτιμές είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. Υποθέτοντας ότι

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}, \tag{9}$$

χρειάζεται να δείξουμε ότι $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$. Για να γίνει αυτό πρέπει να πολλαπλασιάσουμε την Εξίσωση (9) με τη μήτρα $\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I}$. Αρχικά σημειώνουμε ότι

$$(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{v}_j = \mathbf{A}\mathbf{v}_j - \lambda_1\mathbf{v}_j = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{αν } j = 1, \\ (\lambda_j - \lambda_1)\mathbf{v}_j & \text{αν } j > 1, \end{cases}$$

επειδή $\mathbf{A}\mathbf{v}_j = \lambda_j\mathbf{v}_j$ για κάθε j. Έτσι, το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού της Εξίσωσης (9) με $\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I}$ είναι

$$c_2(\lambda_2 - \lambda_1)\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k(\lambda_k - \lambda_1)\mathbf{v}_k = \mathbf{0}. \tag{10}$$

Αλλά τα $k-1$ ιδιοδιανύσματα $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_k$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα από την υπόθεση της επαγωγής, έτσι κάθε ένας από τους συντελεστές $c_j(\lambda_j - \lambda_1)$ πρέπει να είναι μηδέν. Τώρα, από την υπόθεση ότι οι ιδιοτιμές της $\mathbf{A}$ είναι διακεκριμένες έχουμε ότι $\lambda_j - \lambda_1 \neq 0$ για κάθε $j > 1$. Άρα, από την Εξίσωση (10) προκύπτει ότι $c_2 = c_3 = \cdots = c_k = 0$. Αλλά τότε η Εξίσωση (9) δίνει $c_1\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, έτσι έχουμε (επειδή $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$) ότι και το $c_1 = 0$. Επομένως έχουμε δείξει ότι όλοι οι συντελεστές της Εξίσωσης (9) πρέπει να είναι μηδέν, και έτσι ότι τα k ιδιοδιανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Άρα από την επαγωγή το Θεώρημα 2 ισχύει. ◆

Αν μια $n \times n$ μήτρα $\mathbf{A}$ έχει n διακεκριμένες ιδιοτιμές, τότε από το Θεώρημα 2 τα n αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, οπότε από το Θεώρημα 1 έχουμε ότι η μήτρα $\mathbf{A}$ είναι διαγωνιοποιήσιμη. Με αυτό τον τρόπο έχουμε την ικανή συνθήκη για τη διαγωνιοποίηση την οποία και παρουσιάζουμε στο Θεώρημα 3.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 Μια $n \times n$ Μήτρα με n Διακεκριμένες Ιδιοτιμές
Αν μια $n \times n$ μήτρα $\mathbf{A}$ έχει n διακεκριμένες ιδιοτιμές, τότε η μήτρα είναι διαγωνιοποιήσιμη.

Γενικά, ωστόσο, μια $n\times n$ μήτρα $\mathbf{A}$ μπορεί να έχει λιγότερες από n διακεκριμένες ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Αν $k < n$, τότε μπορεί να *αποπειραθούμε* να διαγωνιοποιήσουμε την $\mathbf{A}$ ακολουθώντας την παρακάτω διαδικασία.

Βήμα 1. Βρείτε μια βάση S_i για τον ιδιόχωρο που αντιστοιχεί σε κάθε ιδιοτιμή λ_i.

Βήμα 2. Σχηματίστε την ένωση S αυτών των βάσεων $S_1, S_2, \ldots, S_k$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 4 αυτής της ενότητας, το σύνολο S των ιδιοδιανυσμάτων της $\mathbf{A}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

Βήμα 3. Αν το S περιέχει n ιδιοδιανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, τότε η μήτρα

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix}$$

διαγωνιοποιεί την $\mathbf{A}$: δηλαδή, $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{D}$, όπου τα διαγώνια στοιχεία της $\mathbf{D}$ είναι οι ιδιοτιμές (επαναλαμβανόμενες όπου χρειάζεται) που αντιστοιχούν στα n ιδιοδιανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$.

Αν το σύνολο S—που βρίσκουμε συγχωνεύοντας τις βάσεις για όλους τους ιδιόχωρους της $\mathbf{A}$—περιέχει λιγότερα από n ιδιοδιανύσματα, τότε μπορεί να αποδειχθεί ότι η μήτρα $\mathbf{A}$ δεν είναι διαγωνιοποιήσιμη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Στο Παράδειγμα 7 της Ενότητας 10.1, είδαμε ότι η μήτρα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

έχει μόνο δύο διακεκριμένες ιδιοτιμές, την $\lambda_1 = 2$ και την $\lambda_2 = 3$. Βρίσκουμε ότι η ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$ αντιστοιχεί σε έναν διοδιάστατο ιδιόχωρο με διανύσματα βάσης τα $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ και $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T$, και ότι η $\lambda_2 = 3$ αντιστοιχεί σε έναν μονοδιάστατο ιδιόχωρο με διάνυσμα βάσης το $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$. Από το Θεώρημα 4 (ή με σαφή επαλήθευση), αυτά τα τρία ιδιοδιανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, έτσι από το Θεώρημα 1 έχουμε ότι η 3×3 μήτρα $\mathbf{A}$ είναι διαγωνιοποιήσιμη. Η μήτρα των ιδιοδιανυσμάτων είναι η

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

και έχει αντίστροφη μήτρα την

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

έτσι έχουμε την διαγωνιοποίηση

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} &= \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \mathbf{D} \end{aligned}$$

της μήτρας $\mathbf{A}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4 Γραμμικώς Ανεξάρτητα Ιδιοδιανύσματα

Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ οι διακεκριμένες ιδιοτιμές μιας $n \times n$ μήτρας $\mathbf{A}$. Για κάθε $i = 1, 2, \ldots, k$, έστω S_i μια βάση του ιδιόχωρου που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i. Τότε η ένωση S των βάσεων $S_1, S_2, \ldots, S_k$ είναι ένα γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο ιδιοδιανυσμάτων της $\mathbf{A}$.

Απόδειξη Για να απλοποιήσουμε τις πράξεις, θα παρουσιάσουμε την απόδειξη για την χαρακτηριστική περίπτωση $k = 3$, όπου η μήτρα $\mathbf{A}$ έχει τρεις διακεκριμένες ιδιοτιμές, τις λ_1, λ_2, και λ_3. Έστω

$$\begin{aligned} S_1 &= \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, {}_p\}, \\ S_2 &= \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_q\}, \quad \text{και} \\ S_3 &= \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_r\} \end{aligned}$$

οι βάσεις για τους ιδιόχωρους που αντιστοιχούν στα ιδιοδιανύσματα λ_1, λ_2, και λ_3. Αν υποθέσουμε ότι ένας γραμμικός συνδιασμός διανυσμάτων στο $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ μηδενίζεται—

$$\begin{aligned} &a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \cdots + a_p\mathbf{u}_p \\ &\quad + b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \cdots + b_q\mathbf{v}_q \\ &\qquad + c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + \cdots + c_r\mathbf{w}_r = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{11}$$

—χρειάζεται να δείξουμε ότι όλοι οι συντελεστές είναι μηδέν. Αν γράψουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \cdots + a_p\mathbf{u}_p, \\ \mathbf{v} &= b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \cdots + b_q\mathbf{v}_q, \quad \text{και} \\ \mathbf{w} &= c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + \cdots + c_r\mathbf{w}_r, \end{aligned}$$

τότε η Εξίσωση (11) παίρνει την απλή μορφή

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{0}. \tag{12}$$

Ωστόσο, τα διανύσματα $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, και $\mathbf{w}$ είναι είτε μηδέν είτε είναι ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ_1, λ_2, και λ_3. Στην τελευταία αυτή περίπτωση, εφαρμόζουμε το Θεώρημα 2 και έτσι έχουμε ότι τα $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, και $\mathbf{w}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Επομένως, η Εξίσωση (12) μας δίνει ότι $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \mathbf{w} = \mathbf{0}$. Τελικά, το γεγονός ότι τα $\{\mathbf{u}_i\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα μας δίνει ότι $a_1 = a_2 = \cdots = a_p = 0$ και το γεγονός ότι τα $\{\mathbf{v}_i\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα μας δίνει ότι $b_1 = b_2 = \cdots = b_q = 0$. Παρόμοια, $c_1 = c_2 = \cdots = c_r = 0$. Έτσι έχουμε αποδείξει ότι οι συντελεστές στην (11) είναι όλοι μηδέν, και έτσι τα διανύσματα στο $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. ◆

10.2 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Στα Προβλήματα 1 έως 28, προσδιορίστε εάν η $\mathbf{A}$ είναι διαγωνιοποιήσιμη. Αν ναι, βρείτε την μήτρα της διαγωνιοποίησης $\mathbf{P}$ και την διαγώνια μήτρα $\mathbf{D}$ τέτοιες ώστε $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{D}$.

1. $\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} 6 & -6 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$ 3. $\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ 5. $\begin{bmatrix} 9 & -8 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$ 6. $\begin{bmatrix} 10 & -6 \\ 12 & -7 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 6 & -10 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ 8. $\begin{bmatrix} 11 & -15 \\ 6 & -8 \end{bmatrix}$ 9. $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 11. $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -9 & -1 \end{bmatrix}$ 12. $\begin{bmatrix} 11 & 9 \\ -16 & -13 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ **14.** $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **16.** $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 7 & -8 & 3 \\ 6 & -7 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ **18.** $\begin{bmatrix} 6 & -5 & 2 \\ 4 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ **20.** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -6 & 11 & 2 \\ 6 & -15 & 0 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **22.** $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -5 & 7 & -1 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} -2 & 4 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **24.** $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

25. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ **26.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

27. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

28. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

29. Αποδείξτε: Αν οι μήτρες $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ είναι όμοιες και οι μήτρες $\mathbf{B}$ και $\mathbf{C}$ είναι όμοιες, τότε οι μήτρες $\mathbf{A}$ και $\mathbf{C}$ είναι όμοιες.

30. Υποθέστε ότι οι μήτρες $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ είναι όμοιες και ότι ο n είναι θετικός ακέραιος. Αποδείξτε ότι οι μήτρες $\mathbf{A}^n$ και $\mathbf{B}^n$ είναι όμοιες.

31. Υποθέστε ότι οι αντιστρέψιμές μήτρες $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ είναι όμοιες. Αποδείξτε ότι και οι αντίστροφες τους $\mathbf{A}^{-1}$ και $\mathbf{B}^{-1}$ είναι επίσης όμοιες.

32. Δείξτε ότι αν δύο $n \times n$ μήτρες $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ είναι όμοιες, τότε έχουν την ίδια χαρακτηριστική εξίσωση και έτσι έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

33. Υποθέστε ότι δύο $n \times n$ μήτρες $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ είναι όμοιες και ότι κάθε μια έχει n πραγματικές ιδιοτιμές. Δείξτε ότι $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{B}$ και ότι $\operatorname{Tr} \mathbf{A} = \operatorname{Tr} \mathbf{B}$. Δείτε τα Προβλήματα 38 και 39 της Ενότητας 10.1.

34. Θεωρήστε την 2×2 μήτρα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

και έστω ότι $\Delta = (a-d)^2 + 4bc$. Τότε δείξτε ότι

(α΄) η $\mathbf{A}$ είναι διαγωνιοποιήσιμη αν $\Delta > 0$·

(β΄) η $\mathbf{A}$ δεν είναι διαγωνιοποιήσιμη αν $\Delta < 0$·

(γ΄) Αν $\Delta = 0$, τότε δεν μπορούμε να αποφανθούμε για την $\mathbf{A}$.

35. Έστω ότι η $\mathbf{A}$ είναι μια 3×3 μήτρα με τρεις διακριτές ιδιοτιμές. Περιγράψτε πως μπορούμε να κατασκευάσουμε έξι διαφορετικές αντιστρέψιμες μήτρες $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_6$ και έξι διαφορετικές διαγώνιες μήτρες $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \ldots, \mathbf{D}_6$ τέτοιες ώστε $\mathbf{P}_i\mathbf{D}_i(\mathbf{P}_i)^{-1} = \mathbf{A}$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, 6$.

36. Αποδείξτε: Αν οι διαγωνιοποιήσιμες μήτρες $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές (με την ίδια πολλαπλότητα), τότε οι $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ είναι όμοιες.

37. Δίνεται: Η διαγωνιοποιήσιμη μήτρα $\mathbf{A}$. Δείξτε ότι οι ιδιοτιμές της $\mathbf{A}^2$ είναι τα τετράγωνα των ιδιοτιμών της μήτρας $\mathbf{A}$ αλλά οι μήτρες $\mathbf{A}$ και $\mathbf{A}^2$ έχουν τα ίδια ιδιοδιανύσματα.

38. Υποθέστε ότι μια $n \times n$ μήτρα $\mathbf{A}$ έχει n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε μια ιδιοτιμή λ. Δείξτε ότι η $\mathbf{A}$ είναι διαγώνια μήτρα.

39. Έστω λ_i μια ιδιοτιμή μιας $n \times n$ μήτρας $\mathbf{A}$, και έστω ότι η χαρακτηριστική εξίσωση της $\mathbf{A}$ έχει μόνο πραγματικές λύσεις. Η **αλγεβρική πολλαπλότητα** του λ_i είναι ο μεγαλύτερος θετικός ακέραιος $p(i)$ τέτοιος ώστε ο $(\lambda - \lambda_i)^{p(i)}$ να είναι παράγοντας του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}|$. Η **γεωμετρική πολλαπλότητα** της λ_i είναι η διάσταση $q(i)$ του ιδιόχωρου που αντιστοιχεί στην λ_i. Μπορεί να αποδειχθεί ότι $p(i) \geq q(i)$ για κάθε ιδιοτιμή λ_i. Θεωρώντας αυτά δεδομένα, αποδείξτε ότι η μήτρα $\mathbf{A}$ είναι διαγωνιοποιήσιμη αν και μόνο αν η γεωμετρική πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής είναι ίση με την αλγεβρική πολλαπλότητά της.

10.3 Εφαρμογές των Δυνάμεων Μητρών

Σε αυτή την ενότητα θα συζητήσουμε εφαρμογές στις οποίες χρειάζεται να υπολογίσουμε την $\mathbf{A}^k$ για μεγάλες τιμές του k, εάν δίνεται μια $n \times n$ μήτρα $\mathbf{A}$. Αν η $\mathbf{A}$ είναι διαγωνιοποιήσιμη, τότε η $\mathbf{A}^k$ μπορεί να βρεθεί κατευθείαν και έτσι να αποφύγουμε τον υπολογισμό των δυνάμεων $\mathbf{A}^2, \mathbf{A}^3, \mathbf{A}^4, \ldots$ με διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς μητρών.

Θυμηθείτε από την Ενότητα 10.2 ότι, αν μια $n \times n$ μήτρα $\mathbf{A}$ έχει n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (όχι απαραίτητα διακεκριμένες), τότε

$$\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}, \tag{1}$$

όπου

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

και

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Σημειώνουμε ότι η (1) δίνει

$$\mathbf{A}^2 = (\mathbf{PDP}^{-1})(\mathbf{PDP}^{-1}) = \mathbf{PD}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P})\mathbf{DP}^{-1} = \mathbf{PD}^2\mathbf{P}^{-1}$$

επειδή $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P} = \mathbf{I}$. Πιο γενικά, για κάθε θετικό ακέραιο k,

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^k &= (\mathbf{PDP}^{-1})^k \\ &= (\mathbf{PDP}^{-1})(\mathbf{PDP}^{-1})\cdots(\mathbf{PDP}^{-1})(\mathbf{PDP}^{-1}) \\ &= \mathbf{PD}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P})\mathbf{D}\cdots(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P})\mathbf{DP}^{-1}; \\ \mathbf{A}^k &= \mathbf{PD}^k\mathbf{P}^{-1}. \end{aligned} \tag{2}$$

Αλλά η k δύναμη $\mathbf{D}^k$ της διαγώνιας μήτρας $\mathbf{D}$ είναι εύκολο να υπολογιστεί:

$$\mathbf{D}^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Επομένως από την (2) έχουμε ένα γρήγορο και αποτελεσματικό τρόπο για να υπολογίσουμε οποιαδήποτε δύναμη μιας διαγωνιοποιήσιμης μήτρας $\mathbf{A}$, από την στιγμή που έχουμε βρει τις ιδιοτιμές της και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα, και επομένως τις μήτρες $\mathbf{P}$ και $\mathbf{D}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Βρείτε την $\mathbf{A}^5$ αν

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Λύση Στο Παράδειγμα 7 της Ενότητα 10.1, βρήκαμε ότι η 3×3 μήτρα $\mathbf{A}$ έχει την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 3$ με αντίστοιχο ιδιοδιανύσμα το $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$, και την επαναλαμβανόμενη ιδιοτιμή $\lambda_2 = 2$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα τα $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ και $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T$. Άρα $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$ με

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Πρώτα υπολογίζουμε

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$\mathbf{D}^5 = \begin{bmatrix} 243 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix}.$$

Τότε ο τύπος (3) δίνει

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^5 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 243 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 243 & 32 & -32 \\ 243 & 32 & 0 \\ 243 & 0 & 64 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 454 & -422 & 211 \\ 422 & -390 & 211 \\ 422 & -422 & 243 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Μήτρες Μετάβασης

Θέλουμε να εφαρμόσουμε αυτή τη μέθοδο υπολογισμού της $\mathbf{A}^k$ για να αναλύσουμε τον τύπο φυσικών συστημάτων ο οποίος περιγράφεται από το ακόλουθο μαθηματικό μοντέλο. Υποθέστε ότι η ακολουθία

$$\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k, \ldots \tag{4}$$

n διανυσμάτων ορίζεται από το **αρχικό διάνυσμα** $\mathbf{x}_0$ και μια $n \times n$ **μήτρα μετάβασης** $\mathbf{A}$ με τον ακόλουθο τρόπο

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k \qquad \text{για κάθε } k \geq 0. \tag{5}$$

Φανταζόμαστε ένα φυσικό σύστημα—όπως ένας πληθυσμός με n συγκεκριμένους υποπληθυσμούς —που εξελίσσονται μέσα από μια σειρά διαδοχικών *καταστάσεων* που περιγράφονται από τα διανύσματα στην (4). Ο σκοπός μας είναι να υπολογίσουμε το *διάνυσμα κατάστασης* $\mathbf{x}_k$ στο k βήμα. Ωστόσο, χρησιμοποιώντας επαναλαμβανόμενα την (5), βρίσκουμε ότι

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{A}\mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \mathbf{A}^2\mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}_3 = \mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \mathbf{A}^3\mathbf{x}_0,$$

και γενικά ότι

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}^k\mathbf{x}_0. \tag{6}$$

έτσι ο στόχος μας είναι να υπολογίσουμε την k δύναμη $\mathbf{A}^k$ της μήτρας μετάβασης $\mathbf{A}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Θεωρήστε μια μητροπολιτική περιοχή με *σταθερό* συνολικό πληθυσμό ενός εκατομμυρίου. Αυτή η περιοχή περιλαμβάνει την πόλη και τα προάστια, και θέλουμε να αναλύσουμε της μεταβολές στον αστικό και προαστιακό πληθυσμό. Έστω C_k ο πληθυσμός στην πόλη και S_k ο πληθυσμός στα προάστια μετά από k έτη. Υποθέστε ότι κάθε χρόνο το 15% του πληθυσμού της πόλης μετακινούνται στα προάστια, ενώ το 10% του πληθυσμού των προαστίων μετακινούνται στην πόλη. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} C_{k+1} &= 0.85C_k + 0.10S_k \\ S_{k+1} &= 0.15C_k + 0.90S_k \end{aligned} \tag{7}$$

για κάθε $k \geq 0$. (Για παράδειγμα, ο πληθυσμός της πόλης για την επόμενη χρονιά C_{k+1} είναι ίσο με το 85% του πληθυσμού της πόλης αυτή την χρονιά C_k συν το 10% του πληθυσμού των προαστίων αυτή την χρονιά S_k.) Έτσι το *διάνυσμα πληθυσμού* $\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} C_k & S_k \end{bmatrix}^T$ της μητροπολιτικής περιοχής ικανοποιεί

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k \quad \text{και έτσι} \quad \mathbf{x}_k = \mathbf{A}^k\mathbf{x}_0 \tag{8}$$

(για κάθε $k \geq 0$) με *μήτρα μετάβασης*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.85 & 0.10 \\ 0.15 & 0.90 \end{bmatrix}.$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της μήτρας μετάβασης $\mathbf{A}$ είναι

$$\begin{aligned} \left(\frac{17}{20} - \lambda\right)\left(\frac{9}{10} - \lambda\right) - \left(\frac{3}{20}\right)\left(\frac{1}{10}\right) &= 0; \\ (17 - 20\lambda)(9 - 10\lambda) - 3 &= 0; \\ 200\lambda^2 - 350\lambda + 150 &= 0; \\ 4\lambda^2 - 7\lambda + 3 &= 0; \\ (\lambda - 1)(4\lambda - 3) &= 0. \end{aligned}$$

έτσι οι ιδιοτιμές της $\mathbf{A}$ είναι $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 0.75$. Για $\lambda_1 = 1$, το σύστημα $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ είναι

$$\begin{bmatrix} -0.15 & 0.10 \\ 0.15 & -0.10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

έτσι ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι το $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}^T$. Για $\lambda_2 = 0.75$, το σύστημα $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ είναι

$$\begin{bmatrix} 0.10 & 0.10 \\ 0.15 & 0.15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

έτσι ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^T$. Συμπεραίνουμε ότι $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$, όπου

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{bmatrix},$$

και

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Τώρα υποθέτουμε ότι ο στόχος μας είναι να προσδιορίσουμε τη μακροπρόθεσμη κατανομή του πληθυσμού ανάμεσα στην πόλη και τα προάστια. Σημειώνουμε καταρχήν ότι το $(\frac{3}{4})^k$ είναι «αμελητέο» όταν το k είναι αρκούντως μεγάλο, για παράδειγμα $(\frac{3}{4})^{40} \approx 0.00001$. Προκύπτει ότι αν το $k \geq 40$, τότε ο τύπος $\mathbf{A}^k = \mathbf{PD}^k\mathbf{P}^{-1}$ δίνει

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^k &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\frac{3}{4})^k \end{bmatrix}\left(\frac{1}{5}\right)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \\ &\approx \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{9}$$

Έτσι έχουμε ότι, αν το k είναι αρκούντως μεγάλο, τότε

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k = \mathbf{A}^k\mathbf{x}_0 &\approx \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_0 \\ S_0 \end{bmatrix} \\ &= (C_0 + S_0)\begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

επειδή $C_0 + S_0 = 1$ (εκατομμύρια), ο σταθερός συνολικός πληθυσμός της μητροπολιτικής περιοχής. Έτσι η ανάλυση μας δείχνει ότι, ανεξάρτητα από την αρχική κατανομή του πληθυσμού ανάμεσα στην πόλη και τα προάστιά της, η μακροχρόνια κατανομή θα περιλαμβάνει 40% στην πόλη και 60% στα προάστια

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Το αποτέλεσμα στο Παράδειγμα 2—όπου η μακροπρόθεσμη κατανομή είναι ανεξάρτητη της αρχικής—είναι χαρακτηριστικό μια γενικής κατηγορίας προβλημάτων. Σημειώνουμε ότι η μήτρα μετάβασης $\mathbf{A}$ στην (8) έχει την ιδιότητα ότι *το άθροισμα των στοιχείων κάθε στήλης να είναι* 1. Μια $n \times n$ μήτρα με μη αρνητικά στοιχεία που έχει αυτή την ιδιότητα ονομάζεται **στοχαστική μήτρα**. Μπορεί να αποδειχθεί ότι, αν η $\mathbf{A}$ είναι στοχαστική μήτρα με θετικά μόνο στοιχεία, τότε η $\lambda_1 = 1$ είναι μια ιδιοτιμή της $\mathbf{A}$ και $|\lambda_i| < 1$ για τις υπόλοιπες. (Βλέπε Προβλήματα 39 και 40.) Επιπλέον, καθώς $k \to \infty$, η μήτρα $\mathbf{A}^k$ πλησιάζει την σταθερή μήτρα

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_1 \end{bmatrix},$$

κάθε μια από τις στήλες της οποίας είναι το ιδιοδιάνυσμα της $\mathbf{A}$ που αντιστοιχεί στην $\lambda_1 = 1$ το οποίο έχει άθροισμα στοιχείων ίσο με 1. Η 2×2 στοχαστική μήτρα $\mathbf{A}$ του Παραδείγματος 1 παρουσιάζει αυτό το γενικό συμπέρασμα, με $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{3}{4}$, και $\mathbf{v}_1 = (\frac{2}{5}, \frac{3}{5})$.

Μοντέλα Θηρευτών-Θηραμάτων

Στην συνέχεια, ας θεωρήσουμε έναν πληθυσμό θηρευτών και θηραμάτων ο οποίος αποτελείται από αλεπούδες και κουνέλια που ζουν σε κάποιο δάσος. Αρχικά, υπάρχουν F_0 αλεπούδες και R_0 κουνέλια, ενώ μετά από k μήνες, υπάρχουν F_k αλεπούδες και

R_k κουνέλια. Υποθέτουμε ότι η μετάβαση από έναν μήνα στον επόμενο περιγράφεται από τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} F_{k+1} &= 0.4F_k + 0.3R_k \\ R_{k+1} &= -rF_k + 1.2R_k, \end{aligned} \tag{10}$$

όπου η σταθερά $r > 0$ είναι ο «ρυθμός μεταβολής» που αναπαριστά το μέσο αριθμό κουνελιών που τρώγονται ανά μήνα από κάθε αλεπού. Επομένως,

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k \quad \text{και έτσι} \quad \mathbf{x}_k = \mathbf{A}^k\mathbf{x}_0, \tag{11}$$

όπου

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} F_k \\ R_k \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 \\ -r & 1.2 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Ο όρος $0.4F_k$ στην πρώτη εξίσωση (10) δείχνει ότι, χωρίς κουνέλια, μόνο το 40% των αλεπούδων θα επιβιώνει κάθε μήνα, ενώ ο όρος $0.3R_k$ δείχνει το ποσό αύξησης του πληθυσμού των αλεπούδων δεδομένης της τροφής που διαθέτουν. Ο όρος $1.2R_k$ στην δεύτερη εξίσωση δείχνει ότι, αν δεν υπήρχαν αλεπούδες ο πληθυσμός των κουνελιών θα αυξανόταν 20% κάθε μήνα. Θέλουμε να διερευνήσουμε την μακροπρόθεσμη συμπεριφορά του πληθυσμού των αλεπούδων και των κουνελιών για διαφορετικές τιμές του ρυθμού r "κατανάλωσης" κουνελιών από αλεπούδες.

Η χαρακτηριστική εξίσωση της μήτρας μετάβασης $\mathbf{A}$ στην (12) είναι

$$\begin{aligned} (0.4 - \lambda)(1.2 - \lambda) + (0.3)r &= 0; \\ (4 - 10\lambda)(12 - 10\lambda) + 30r &= 0; \\ 100\lambda^2 - 160\lambda + (48 + 30r) &= 0. \end{aligned}$$

Ο τύπος της τετραγωνικής εξίσωσης τότε δίνει

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{200}\left[160 \pm \sqrt{(160)^2 - (400)(48 + 30r)}\right] \\ &= \frac{1}{10}\left(8 \pm \sqrt{16 - 30r}\right), \end{aligned} \tag{13}$$

ο οποίος δίνει τις ιδιοτιμές της μήτρας $\mathbf{A}$ σε όρους ρυθμού r. Στα παραδείγματα 3, 4, και 5 παρουσιάζονται τρεις πιθανότητες (για διαφορετικές τιμές του r) για το τι μπορεί να συμβεί στις αλεπούδες και στα κουνέλια καθώς το k αυξάνει:

- οι F_k και R_k μπορεί να πλησιάζουν σταθερές μη μηδενικές τιμές. Σε αυτή την περίπτωση *οριακά σταθεροί πληθυσμοί* συνυπάρχουν σε ισορροπία.
- οι F_k και R_k μπορεί να πλησιάζουν το μηδέν. Αυτή είναι η περίπτωση της *αμοιβαίας εξαφάνισης* και των δύο ειδών.
- οι F_k και R_k μπορεί να αυξάνουν χωρίς όριο. Αυτή είναι η περίπτωση της *πληθυσμιακής έκρηξης*.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Πληθυσμός Σταθερός στο Όριο Αν $r = 0.4$, τότε η Εξίσωση (13) δίνει τις ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 0.6$. Για $\lambda_1 = 1$, το σύστημα $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ είναι

$$\begin{bmatrix} -0.6 & 0.3 \\ -0.4 & 0.2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

άρα ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι το $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T$. Για $\lambda_2 = 0.6$, το σύστημα $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ είναι

$$\begin{bmatrix} -0.2 & 0.3 \\ -0.4 & 0.6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

άρα ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι το $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}^T$. Έχουμε ότι $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$, όπου

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.6 \end{bmatrix}, \quad \text{και} \quad \mathbf{P}^{-1} = -\tfrac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Τώρα είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε την $\mathbf{A}^k$. Αν το k είναι αρκούντως μεγάλο ώστε $(0.6)^k \approx 0$—για παράδειγμα, $(0.6)^{25} \approx 0.000003$—τότε ο τύπος $\mathbf{A}^k = \mathbf{P}\mathbf{D}^k\mathbf{P}^{-1}$ μας δίνει

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^k &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (0.6)^k \end{bmatrix}(-\tfrac{1}{4})\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \\ &\approx -\tfrac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= -\tfrac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \tfrac{1}{4}\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Έτσι έχουμε ότι αν το k είναι αρκούντως μεγάλο, τότε

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}^k\mathbf{x}_0 = \tfrac{1}{4}\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_0 \\ R_0 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{4}\begin{bmatrix} 3R_0 - 2F_0 \\ 6R_0 - 4F_0 \end{bmatrix}$$

—δηλαδή,

$$\begin{bmatrix} F_k \\ R_k \end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \text{όπου} \quad \alpha = \tfrac{1}{4}(3R_0 - 2F_0). \tag{14}$$

Αν υποθέσουμε ότι οι αρχικοί πληθυσμοί είναι τέτοιοι ώστε $\alpha > 0$ (δηλαδή, $3R_0 > 2F_0$), από τη (14) έχουμε ότι, καθώς το k αυξάνει, οι πληθυσμοί των αλεπούδων και των κουνελιών πλησιάζουν μια σταθερή κατάσταση στην οποία τα κουνέλια θα είναι διπλάσια από τις αλεπούδες. Για παράδειγμα, αν $F_0 = R_0 = 100$, τότε όταν το k είναι αρκούντως μεγάλο, θα υπάρχουν 25 αλεπούδες και 50 κουνέλια.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Αμοιβαία εξαφάνιση Αν $r = 0.5$, τότε η Εξίσωση (13) δίνει τις ιδιοτιμές $\lambda_1 = 0.9$ και $\lambda_2 = 0.7$. Για $\lambda_1 = 0.9$, το σύστημα $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ είναι

$$\begin{bmatrix} -0.5 & 0.3 \\ -0.5 & 0.3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

άρα ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι το $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix}^T$. Για $\lambda_2 = 0.7$, το σύστημα $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ είναι

$$\begin{bmatrix} -0.3 & 0.3 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

άρα ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι το $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$. Έχουμε ότι $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$, με

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{bmatrix}, \quad \text{και} \quad \mathbf{P}^{-1} = -\tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Τώρα και τα δύο $(0.9)^k$ και $(0.7)^k$ πλησιάζουν το 0 καθώς k αυξάνει χωρίς όριο ($k \to +\infty$). Έτσι, αν το k είναι αρκούντως μεγάλος, τότε ο τύπος $\mathbf{A}^k = \mathbf{P}\mathbf{D}^k\mathbf{P}^{-1}$ δίνει

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^k &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (0.9)^k & 0 \\ 0 & (0.7)^k \end{bmatrix}(-\tfrac{1}{2})\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \\ &\approx -\tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

άρα

$$\begin{bmatrix} F_k \\ R_k \end{bmatrix} = \mathbf{A}^k\begin{bmatrix} F_0 \\ R_0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_0 \\ R_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Επομένως, οι F_k και R_k και οι δύο πλησιάζουν το μηδέν καθώς το $k \to +\infty$, έτσι και οι αλεπούδες και τα κουνέλια αλληλοεξουδετερώνονται.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 Πληθυσμιακή Έκρηξη Αν $r = 0.325$, τότε η Εξίσωση (13) δίνει για ιδιοτιμές τις $\lambda_1 = 1.05$ και $\lambda_2 = 0.55$. Για $\lambda_1 = 1.05$, το σύστημα $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ είναι

$$\begin{bmatrix} -0.650 & 0.30 \\ -0.325 & 0.15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Κάθε εξίσωση είναι πολλαπλάσιο της $-13x + 6y = 0$, έτσι ένα αντίστοιχο ιδιοδιανύσμα είναι το $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 6 & 13 \end{bmatrix}^T$. Για $\lambda_2 = 0.55$, το σύστημα $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ είναι

$$\begin{bmatrix} -0.150 & 0.30 \\ -0.325 & 0.65 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

έτσι ένα αντίστοιχο ιδιοδιανύσμα είναι το $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}^T$. Συμπεραίνουμε ότι $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$ με

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 13 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1.05 & 0 \\ 0 & 0.55 \end{bmatrix}, \quad \text{και} \quad \mathbf{P}^{-1} = -\tfrac{1}{20}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -13 & 6 \end{bmatrix}.$$

Σημειώστε ότι το $(0.55)^k$ πλησιάζει το μηδέν αλλά το $(1.05)^k$ αυξάνει χωρίς όριο καθώς το $k \to +\infty$. Έπεται ότι αν το k είναι αρκούντως μεγάλο, τότε ο τύπος $\mathbf{A}^k = \mathbf{P}\mathbf{D}^k\mathbf{P}^{-1}$ δίνει

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^k &= \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 13 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (1.05)^k & 0 \\ 0 & (0.55)^k \end{bmatrix}(-\tfrac{1}{20})\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -13 & 6 \end{bmatrix} \\
&\approx -\tfrac{1}{20}\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 13 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (1.05)^k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -13 & 6 \end{bmatrix} \\
&= -\tfrac{1}{20}\begin{bmatrix} (6)(1.05)^k & 0 \\ (13)(1.05)^k & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -13 & 6 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

και έτσι

$$\mathbf{A}^k \approx -\tfrac{1}{20}(1.05)^k\begin{bmatrix} 6 & -12 \\ 13 & -26 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_k = \mathbf{A}^k\mathbf{x}_0 &\approx -\tfrac{1}{20}(1.05)^k\begin{bmatrix} 6 & -12 \\ 13 & -26 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_0 \\ R_0 \end{bmatrix} \\
&= -\tfrac{1}{20}(1.05)^k\begin{bmatrix} 6F_0 - 12R_0 \\ 13F_0 - 26R_0 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$epomnwc \begin{bmatrix} F_k \\ R_k \end{bmatrix} \approx (1.05)^k\gamma \qquad \textbf{(16)}$$

Αν το $\gamma > 0$ (δηλαδή, αν $2R_0 > F_0$), τότε από τον παράγοντα $(1.05)^k$ στην (17) προκύπτει ότι ο πληθυσμός των αλεπούδων αλλά και των κουνελιών αυξάνει με ρυθμό 5% ανά μήνα, δηλαδή και οι δύο αυξάνουν χωρίς όριο καθώς το $k \to +\infty$. Επιπλέον, όταν το k είναι αρκούντως μεγάλο, οι δύο πληθυσμοί διατηρούν μια σταθερή αναλογία 6 αλεπούδες για κάθε 13 κουνέλια. Είναι επίσης ενδιαφέρον να σημειώσουμε ότι ο μηνιαίος «πολλαπλασιαστής πληθυσμού» είναι η μεγαλύτερη ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1.05$ και ότι τελική *αναλογία* πληθυσμών προσδιορίζεται από το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 6 & 13 \end{bmatrix}^T$.

Εν ολίγοις, συγκρίνοντας τα αποτελέσματα στα Παραδείγματα 3, 4, και 5, το κρίσιμο $r = 0.4$ στο Παράδειγμα 3 αντιπροσωπεύει μια μηνιαία κατανάλωση 0.4 κουνελιών ανά αλεπού,με αποτέλεσμα σταθερούς τελικούς πληθυσμούς των δύο ειδών. Αλλά αν οι αλεπούδες είναι πιο λαίμαργες και καταναλώνουν περισσότερο από 0.4 κουνέλια η καθεμιά μηνιαία, τότε το αποτέλεσμα είναι η εξαφάνιση και των δύο ειδών (όπωςστο Παράδειγμα 4). Αν τα κουνέλια γίνουν πιο επιδέξια στην αποφυγή αλεπούδων, οπότε κάθε αλεπού θα καταναλώνει λιγότερο από 0.4 κουνέλια κάθε μήνα, τότε και οι δύο πληθυσμοί θα αυξάνονται χωρίς όριο, όπως στο Παράδειγμα 5.

Το Θεώρημα Cayley-Hamilton

Ένα από τα πιο αξιοσημείωτα και σημαντικά θεωρήματα της γραμμικής άλγεβρας λέει ότι *ότι κάθε μήτρα ικανοποιεί την χαρακτηριστική της εξίσωση* (όπως αποδείχθηκε για την περίπτωση της 2×2 μήτρας στο Πρόβλημα 29 της Ενότητας 8.4).

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 **Cayley-Hamilton**
Αν μια $n \times n$ μήτρα $\mathbf{A}$ έχει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$p(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0,$$

τότε

$$p(\mathbf{A}) = (-1)^n \mathbf{A}^n + c_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \cdots + c_2\mathbf{A}^2 + c_1\mathbf{A} + c_0\mathbf{I} = \mathbf{0}. \qquad \textbf{(17)}$$

Απόδειξη Θεωρούμε την (18) μόνο για την ειδική περίπτωση της *διαγωνοποιήσιμης* μήτρας $\mathbf{A}$, καθώς η γενική περίπτωση θα συζητήθει στην Ενότητα 10.5. Αν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές της $\mathbf{A}$, τότε

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{P}\mathbf{D}^k\mathbf{P}^{-1}, \quad \text{όπου} \quad \mathbf{D}^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

όπως στις Εξισώσεις (2) και (3) στην αρχή της ενότητας. Αρχικά, σημειώνουμε ότι

$$\begin{aligned} p(\mathbf{D}) &= (-1)^n\mathbf{D}^n + c_{n-1}\mathbf{D}^{n-1} + \cdots + c_2\mathbf{D}^2 + c_1\mathbf{D} + c_0\mathbf{I} \\ &= (-1)^n \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^n \end{bmatrix} + c_{n-1} \begin{bmatrix} \lambda_1^{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{n-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \\ &\quad + \cdots + c_2 \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^2 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \\ &\quad + c_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} p(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p(\lambda_n) \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

επειδή $p(\lambda_k) = 0$ για $k = 1, 2, \ldots, n$. Έτσι η διαγώνια μήτρα $\mathbf{D}$ της μήτρας $\mathbf{A}$ ικανοποιεί την χαρακτηριστική εξίσωση της $\mathbf{A}$. Επομένως έχουμε ότι

$$\begin{aligned} p(\mathbf{A}) &= (-1)^n\mathbf{P}\mathbf{D}^n\mathbf{P}^{-1} + c_{n-1}\mathbf{P}\mathbf{D}^{n-1}\mathbf{P}^{-1} + \cdots \\ &\qquad + c_2\mathbf{P}\mathbf{D}^2\mathbf{P}^{-1} + c_1\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1} + c_0\mathbf{P}\mathbf{I}\mathbf{P}^{-1} \\ &= \mathbf{P}p(\mathbf{D})\mathbf{P}^{-1} \\ &= \mathbf{P}\,\mathbf{0}\,\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

. ◆

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 Στο Παράδειγμα 7 της Ενότητας 10.1, βρήκαμε ότι η μήτρα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

έχει για χαρακτηριστικό πολυώνυμο το

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12,$$

έτσι

$$-\mathbf{A}^3 + 7\mathbf{A}^2 - 16\mathbf{A} + 12\mathbf{I} = \mathbf{0}, \tag{18}$$

από το θεώρημα των Cayley-Hamilton. Επειδή

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 14 & -10 & 5 \\ 10 & -6 & 5 \\ 10 & -10 & 9 \end{bmatrix},$$

από την (19) έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^3 &= 7\mathbf{A}^2 - 16\mathbf{A} + 12\mathbf{I} \\
&= 7\begin{bmatrix} 14 & -10 & 5 \\ 10 & -6 & 5 \\ 10 & -10 & 9 \end{bmatrix} - 16\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} + 12\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 46 & -38 & 19 \\ 38 & -30 & 19 \\ 38 & -38 & 27 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας με $\mathbf{A}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^4 &= 7\mathbf{A}^3 - 16\mathbf{A}^2 + 12\mathbf{A} \\
&= 7(7\mathbf{A}^2 - 16\mathbf{A} + 12\mathbf{I}) - 16\mathbf{A}^2 + 12\mathbf{A} \\
&= 33\mathbf{A}^2 - 100\mathbf{A} + 84\mathbf{I} \\
&= 33\begin{bmatrix} 14 & -10 & 5 \\ 10 & -6 & 5 \\ 10 & -10 & 9 \end{bmatrix} - 100\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} + 84\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 146 & -130 & 65 \\ 130 & -114 & 65 \\ 130 & -130 & 81 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Άρα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Cayley-Hamilton για να εκφράσουμε (θετικές ακέραιες) δυνάμεις μιας 3×3 μήτρας $\mathbf{A}$ σε σχέση με την $\mathbf{A}$ και την $\mathbf{A}^2$. Επίσης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Cayley-Hamilton για να βρούμε την αντίστροφη μήτρα $\mathbf{A}^{-1}$. Αν πολλαπλασιάζουμε την Εξίσωση (19) με $\mathbf{A}^{-1}$, μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση $-\mathbf{A}^2 + 7\mathbf{A} - 16\mathbf{I} + 12\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{0}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^{-1} &= \frac{1}{12}(\mathbf{A}^2 - 7\mathbf{A} + 16\mathbf{I}) \\
&= \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 14 & -10 & 5 \\ 10 & -6 & 5 \\ 10 & -10 & 9 \end{bmatrix} - \frac{7}{12}\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} + \frac{16}{12}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

10.3 ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Στα Προβλήματα 1 έως 10, δίνεται μια μήτρα $\mathbf{A}$. *Χρησιμοποιήστε την μέθοδο του Παραδείγματος 1 για να υπολογίσετε την* $\mathbf{A}^5$.

1. $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 6 & -6 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$ **4.** $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} 6 & -10 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ **8.** $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ **10.** $\begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Βρείτε την $\mathbf{A}^{10}$ *για κάθε μήτρα* $\mathbf{A}$ *που δίνεται στα Προβλήματα 11 έως 14.*

11. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 2 \\ 21 & -15 & -6 \end{bmatrix}$ **12.** $\begin{bmatrix} 11 & -6 & -2 \\ 20 & -11 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ **14.** $\begin{bmatrix} 5 & -5 & -3 \\ 2 & -2 & -1 \\ 4 & -4 & -3 \end{bmatrix}$

15–24. Χρησιμοποιήστε το θεώρημα Cayley-Hamilton (όπως στο Παράδειγμα 6) για να βρείτε τις $\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{A}^3$, και $\mathbf{A}^4$ για κάθε μήτρα $\mathbf{A}$ που δίνεται στα Προβλήματα 5–14 (αντίστοιχα).

Στα Προβλήματα 25 έως 30, έστω η μήτρα μετάβασης ενός πληθυσμού από την πόλη στα προάστια $\mathbf{A}$ *(όπως στο Παράδειγμα 2). Βρείτε την σταθερή μακροπρόθεσμη κατανομή του συνολικού πληθυσμού ανάμεσα στην πόλη και τα προάστια της.*

25. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}$ **26.** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.85 & 0.05 \\ 0.15 & 0.95 \end{bmatrix}$

27. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.15 \\ 0.25 & 0.85 \end{bmatrix}$ **28.** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 \end{bmatrix}$

29. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.05 \\ 0.1 & 0.95 \end{bmatrix}$ **30.** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.15 \\ 0.2 & 0.85 \end{bmatrix}$

Τα Προβλήματα 31 έως 33 αναφέρονται στους πληθυσμούς αλεπούδων-κουνελιών, όπως στα Παραδείγματα 3 εως 5. Διαφέρει μόνο η μήτρα μετάβασης

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 \\ -r & 1.2 \end{bmatrix}$$

.

31. Αν $r = 0.16$, δείξτε ότι οι πληθυσμοί των αλεπούδων και των κουνελιών είναι μακροπρόθεσμα σταθεροί, με 5 αλεπούδες για κάθε 4 κουνέλια.

32. Αν $r = 0.175$, δείξτε ότι μακροπρόθεσμα και οι δύο πληθυσμοί εξαφανίζονται.

33. Αν $r = 0.135$, δείξτε ότι μακροπρόθεσμα και οι δύο πληθυσμοί αυξάνουν με ρυθμό 5% μηνιαία, διατηρώντας σταθερή αναλογία 10 αλεπούδων για κάθε 9 κουνέλια.

34. Υποθέστε ότι η 2×2 μήτρα $\mathbf{A}$ έχει ιδιοτιμές τις $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = -1$ και ιδιοδιανύσματα τα $\mathbf{v}_1 = (3, 4)$, $\mathbf{v}_2 = (5, 7)$, αντίστοιχα. Βρείτε τη μήτρα $\mathbf{A}$ και τις δυνάμεις $\mathbf{A}^{99}$ και $\mathbf{A}^{100}$.

35. Υποθέστε ότι $|\lambda| = 1$ για κάθε ιδιοτιμή λ της διαγωνιοποιήσιμης μήτρας $\mathbf{A}$. Δείξτε ότι $\mathbf{A}^n = \mathbf{I}$ για κάθε ζυγό θετικό ακέραιο n.

36. Υποθέστε ότι

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Δείξτε ότι $\mathbf{A}^{2n} = \mathbf{I}$ και ότι $\mathbf{A}^{2n+1} = \mathbf{A}$ για κάθε θετικό ακέραιο n.

37. Υποθέστε ότι

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Δείξτε ότι $\mathbf{A}^{4n} = \mathbf{I}$, $\mathbf{A}^{4n+1} = \mathbf{A}$, $\mathbf{A}^{4n+2} = -\mathbf{I}$, και $\mathbf{A}^{4n+3} = -\mathbf{A}$ για κάθε θετικό ακέραιο n.

38. Η μήτρα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

δεν είναι διαγωνιοποιήσιμη. (Γιατί όχι;) Γράψτε $\mathbf{A} = \mathbf{I} + \mathbf{B}$. Δείξτε ότι $\mathbf{B}^2 = \mathbf{0}$ και από αυτό ότι

$$\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

39. Έστω η στοχαστική μήτρα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} p & 1-q \\ 1-p & q \end{bmatrix},$$

όπου$0 < p < 1$ και $0 < q < 1$. Δείξτε ότι οι ιδιοτιμές της $\mathbf{A}$ είναι $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = p + q - 1$, έτσι ώστε $|\lambda_2| < 1$.

40. Υποθέστε ότι η $\mathbf{A}$ είναι μια $n \times n$ στοχαστική μήτρα—το άθροισμα των στοιχείων κάθε στήλης είναι ίσο με 1. Αν $\mathbf{v} = (1, 1, \ldots, 1)$, δείξτε ότι $\mathbf{A}^T\mathbf{v} = \mathbf{v}$. Γιατί προκύπτει από αυτό ότι η $\lambda = 1$ είναι ιδιοτιμή της $\mathbf{A}$;

41. Στο βιβλίο του *Liber abaci* (Βιβλίο Υπολογισμών) που δημοσιεύθηκε το 1202, ο Leonardo Fibonacci* έκανε την ακόλουθη ερώτηση. Πόσα ζευγάρια κουνελιών γεννιόνται από ένα μόνο ζευγάρι σε ένα χρόνο, εάν κάθε μήνα, κάθε ζευγάρι γεννάει ένα νέο ζευγάρι, το οποίο είναι εξίσου παραγωγικό ξεκινώντας από τον αμέσως επόμενο μήνα της γέννησης του· Η απάντηση δίνεται από την ακολουθία **Fibonacci**

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55, \ldots$$

στην οποία κάθε όρος είναι το άθροισμα των δύο αμέσως προηγούμενων. Δηλαδή, η ακολουθία ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

$$s_0 = 1 = s_1, \quad s_{n+1} = s_n + s_{n-1} \quad \text{φορ } n \geq 1.$$

Τότε ο αριθμός των ζευγαριών των κουνελιών που υπάρχουν μετά απο n μήνες είναι s_n. Σημειώνουμε ότι αν

$$\mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} s_{n+1} \\ s_n \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

τότε

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{A}\mathbf{x}_{n-1} \quad \text{και σο} \quad \mathbf{x}_n = \mathbf{A}^n\mathbf{x}_0,$$

όπου $\mathbf{x}_0 = (1, 1)$.

(α΄) Δείξτε ότι η $\mathbf{A}$ έχει ιδιοτιμές τις $\lambda_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ και $\lambda_2 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{v}_1 = (1 + \sqrt{5}, 2)$ και $\mathbf{v}_2 = (1 - \sqrt{5}, 2)$, αντίστοιχα.

* «Leonardo, son of Bonacci», 1175–1250, ένας από τους εξέχοντες μαθηματικούς του μεσαίωνα. Είναι επίσης γνωστός ως Leonardo της Πίζας (Leonardo Pisano)

(β΄) Υπολογίστε

$$\begin{bmatrix} s_{n+1} \\ s_n \end{bmatrix} = \mathbf{A}^n \mathbf{x}_0 = \mathbf{P}\mathbf{D}^n\mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

για να προκύψει ο εκπληκτικός τύπος

$$s_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right].$$

Έτσι μετά από 1 χρόνο ο αριθμός των ζευγαριών των κουνελιών είναι

$$s_{12} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{13} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{13} \right] = 233.$$

Δείξτε ότι υπάρχουν 75,025 ζευγάρια κουνελιών μετά από 2 χρόνια και πάνω από 2.5 τρισεκατομμύρια ζευγάρια κουνελιών μετά από 5 χρόνια.