# Ιδιοτιμές & Ιδιοδιανύσματα

Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας

# Ιδιοτιμή & Ιδιοδιάνυσμα

Eigenvalues & Eigenvectors

**Ορισμός**: Έστω τετραγωνική μήτρα $A_n$. Ένας αριθμός $\lambda \in \mathbb{R}$ λέγεται ιδιοτιμή (ή χαρακτηριστική τιμή) της Α αν υπάρχει μήτρα $X_{nx1}$ τ.ώ.:

$$A \cdot X = \lambda \cdot X \Leftrightarrow \boxed{(A - \lambda \cdot I_n) \cdot X = O}$$

δηλ. έχουμε το ομογενές σύστημα:

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)\, x_1 + a_{12}x_2 \ldots\ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)\, x_2 \ldots\ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 \ldots + (a_{nn} - \lambda)\, x_n = 0 \end{cases}$$

**Ορισμός**: Η μήτρα $X=[x_j]_{1 \leq j \leq n}$ λέγεται ιδιοδιάνυσμα (ή χαρακτηριστικό διάνυσμα) της Α για την τιμή λ.

# Χαρακτηριστική εξίσωση

Το προηγούμενο σύστημα είναι ομογενές, άρα από το πόρισμα για τα ομογενή συστήματα ισχύει ότι:

$(A - \lambda \cdot I_n) \cdot x = O$ έχει μη-μηδενικές λύσεις $\Leftrightarrow$ $|A - \lambda \cdot I_n| = 0$ $\Leftrightarrow$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Κάνοντας τις πράξεις προκύπτει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_A(\lambda)$ & η χαρακτηριστική εξίσωση $P_A(\lambda) = 0$

δηλ. $\boxed{|A - \lambda \cdot I_n| = 0 \Leftrightarrow P_A(\lambda) = 0}$

**Ορισμός**: Το σύνολο λi της ιδιοτιμών της Α λέγεται φάσμα της Α = σ(Α)

Η μεγαλύτερη ιδιοτιμή (max|λi|} λέγεται φασματική ακτίνα της Α = ρ(Α)

# Ασκήσεις

Βρείτε τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα των μητρών:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -5 & -9 \\ 8 & 9 & 18 \\ -2 & -3 & -7 \end{bmatrix} \qquad A2 = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -9 \\ 0 & 5 & 18 \\ 0 & -2 & -7 \end{bmatrix}$$

Λύση: και για τις 2 μήτρες είναι $-\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1$

# Ασκήσεις

1. Έστω η μήτρα $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$
   - Δώστε το χαρακτηριστικό της πολυώνυμο
   - Βρείτε τις ιδιοτιμές της

2. Να δείξετε ότι το $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα της μήτρας $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ για την ιδιοτιμή λ=3

3. Όμοια για το $v = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}$ για την ιδιοτιμή λ=2 της μήτρας

   $$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

# Λύσεις

1. χαρακτηριστικό πολυώνυμο: $\lambda^2-5\lambda+4$
   ιδιοτιμές: 1 και 4

2. Για να είναι πρέπει να ισχύει ότι $A \cdot x = \lambda \cdot x$
   Πράγματι:
   $$Ax = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3\mathrm{x}$$

3. Όμοια με την (2)

# Άσκηση

Έστω η μήτρα $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Να δείξετε ότι της A:

1. για την ιδιοτιμή λ=0 το διάνυσμα $[1\ 0\ 0]^T$ είναι ιδιοδιάνυσμα
2. για την ιδιοτιμή λ=3 το διάνυσμα $[0\ 0\ 1]^T$ είναι ιδιοδιάνυσμα
3. για την ιδιοτιμή λ=2 το διάνυσμα $[1\ 2\ 0]^T$ είναι ιδιοδιάνυσμα

# Λύση

$$A\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$A\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\3\end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$A\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\4\\0\end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$$

https://el.wikipedia.org/wiki/Ιδιοτιμές_και_ιδιοδιανύσματα

# Υπενθύμιση

**Θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας (ΘΘΑ)**

(R. Descartes, 1637)

‘Κάθε μη μηδενικό πολυώνυμο μίας μεταβλητής και βαθμού *n με μιγαδικούς συντελεστές* έχει ακριβώς *n μιγαδικές ρίζες*’

Άρα, στο χαρακτηριστικό μας πολυώνυμο: $(\in \mathbb{R}$ ή $\in \mathbb{C})$

εφόσον το λ εμφανίζεται n φορές, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_A(\lambda)$ είναι ‘n’ βαθμού

**& από το ΘΘΑ:** άρα η χαρακτηριστική εξίσωση $P_A(\lambda) = 0$ έχει n λύσεις (δηλ. η A θα έχει πάντα ιδιοτιμές)

**ΠΡΟΣΟΧΗ**: Κάποιες από τις τιμές μπορεί να είναι πολλαπλής μορφής ή/και μιγαδικές.

# Ορισμοί

Έστω λi οι ιδιοτιμές μιας An:

- A θετικά ορισμένη αν $\lambda_i > 0$ για κάθε i=1..n &
  θετικά ημι-ορισμένη αν $\lambda_i \geq 0$ για κάθε i=1..n
- A αρνητικά ορισμένη αν $\lambda_i < 0$ για κάθε i=1..n &
  αρνητικά ημι-ορισμένη αν $\lambda_i \leq 0$ για κάθε i=1..n
- A απροσδιόριστη αν υπάρχει $\lambda_\kappa > 0$ & $\lambda_\mu < 0$
  $\kappa \neq \mu, \quad 1 \leq \kappa, \mu \leq n$

# Πρόταση

(Ιδιοτήτων των ιδιοτιμών)

Έστω $A = [\alpha_{ij}]_{nxn}$ με $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ οι ιδιοτιμές της, τότε:

- $trA = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$ το ίχνος της A (Υπενθ.: $trA = \Sigma\alpha_{ii}$)
- $|A| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n$
- $\sigma(A) = \sigma(A^T)$
- Αν A τριγωνική (άνω, κάτω ή διαγώνια), τότε οι ιδιοτιμές είναι τα στοιχεία της διαγωνίου της
- Αν A ομαλή (δηλ. $|A| \neq 0$), τότε όλες οι ιδιοτιμές $\lambda_i \neq 0$

$1 \leq i \leq n$

δηλ. αν $|A|=0$, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\lambda=0$

# Ιδιοχώρος

**Τα ιδιοδιανύσματα μιας μήτρας Α για την ιδιοτιμή λ**, είναι διανύσματα ≠ 0, που ικανοποιούν την εξίσωση

$$A \cdot X = \lambda \cdot X$$

… δηλ. είναι μη-μηδενικά διανύσματα, 'λύσεις' του ομογενούς συστήματος $(A - \lambda \cdot I_n) \cdot X = O$

Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι γραμμικώς ανεξάρτητα

**Ορισμός**: Ονομάζουμε ιδιοχώρο της Α για την ιδιοτιμή λ τον χώρο που δημιουργείται από τις παραπάνω 'λύσεις'

# Παράδειγμα

**Βρείτε τις ιδιοτιμές /ιδιοδιανύσματα της** $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

$$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} 4-\lambda & -5 \\ 2 & -3-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (4-\lambda)\cdot(-3-\lambda)+10 = 0$$

Άρα $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ με ρίζες τις $\lambda_1 = 2$ & $\lambda_2 = -1$ $(\sigma(A)=\{-1,2\})$

**<u>1η περίπτωση με $\lambda_1 = 2$</u>**, το ιδιοδιάνυσμα X είναι τ.ώ.:

$(A - \lambda \cdot I_n) \cdot X = O \Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow$ x = 5y/2

Άρα η λύση είναι τα (x, y) = $\{(5s/2, s),\ s \in \mathbb{R}\} = \{s\cdot(5/2, 1),\ s \in \mathbb{R}\}$

# Παράδειγμα συνέχεια

- Άρα τα **ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ=2** είναι τα μη-μηδενικά διανύσματα της μορφής (5s/2, s), s ϵ $\mathbb{R}$

- **Ο ιδιοχώρος για την ιδιοτιμή λ=2** είναι ο χώρος που περιέχει όλα τα διανύσματα αυτής της μορφής (5s/2, s), s ϵ $\mathbb{R}$

- **Το διάνυσμα που παράγει τον ιδιοχώρο** για την ιδιοτιμή λ=2 είναι το (5/2, 1)

- Ως μη-μηδενικό **αποτελεί μία βάση του ιδιοχώρου για την ιδιοτιμή λ=2**

- **2η περίπτωση με $\lambda_2$ = -1**, …. ….. (x, y) = {t·(1, 1), t ϵ $\mathbb{R}$} κ.λπ.

Τα διανύσματα (5/2, 1) & (1, 1) είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, άρα αποτελούν μία βάση του $\mathbb{R}^2$

# Άσκηση

**Όμοια, να βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα για την:**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

**Υπόδειξη**:

1. Λύστε την χαρακτηριστική εξίσωση (ως προς λ) $P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow |A - \lambda \cdot I_n| = 0$
2. Για κάθε λ βρείτε τις λύσεις (x, y, z) που επαληθεύουν την $P_A(\lambda) = 0$

**Παρατήρηση:** Εφόσον πάντα ψάχνουμε για τις μη-μηδενικές ιδιοτιμές λ, σημαίνει ότι η απάντησή μας θα πρέπει να αφορά ΑΠΕΙΡΕΣ λύσεις.
Αν όχι σημαίνει ότι έχουμε στην επίλυση κάποιο βήμα λάθος.

# Λύση

**Προσοχή**: χρησιμοποιείστε την μέθοδο του Horner για την εύρεση μιας πιθανής ρίζας ρ και στη συνέχεια με διαίρεση του πολυωνύμου με (x-ρ) για τις υπόλοιπες ρίζες του

$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow |A - \lambda \cdot I_n| = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3+6\lambda^2+3\lambda+8 = 0 \Leftrightarrow$

$(-\lambda^2-2\lambda-13) \cdot (\lambda-8) = 0 \Leftrightarrow -(\lambda+1)^2 \cdot (\lambda-8) = 0$

απ' όπου έχουμε $\lambda_1 = -1$ (διπλή) και $\lambda_2 = 8$

**1η περίπτωση με $\lambda_1 = -1$**, το ιδιοδιάνυσμα X είναι τ.ώ.:

$(A - \lambda \cdot I_n) \cdot X = O \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 2x + y + 2z = 0 \Leftrightarrow y = -2x - 2z$

Άρα $X = (x, y, z) = (x, -2x-2z, z) = x\cdot(1,-2,0)+z\cdot(0,-2,1), \quad x, z \in \mathbb{R}$

Τα διανύσματα (1,-2,0) & (0,-2,1) είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, άρα αποτελούν μία βάση του ιδιοχώρου E={(1,-2,0) , (0,-2,1) }

# Λύση

**Προσοχή**: χρησιμοποιείστε την μέθοδο του Horner για την εύρεση μιας πιθανής ρίζας ρ και στη συνέχεια με διαίρεση του πολυωνύμου με (x-ρ) για τις υπόλοιπες ρίζες του

**2η περίπτωση με $\lambda_2 = 8$**,
το ιδιοδιάνυσμα X του συστήματος (A - λ·I)·X = O είναι τ.ώ.: ....
χρησιμοποιώντας την μέθοδο απαλοιφής του Gauss στην μήτρα των συντελεστών του φθάνουμε στο σύστημα:

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -8 & 2 \\ -5 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & -18 & 9 \\ 0 & 18 & -9 \end{pmatrix}$$

και τελικά στο (x, y, z) = y·(2, 1, 2)

Δηλ. στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 8$ αντιστοιχεί το ιδιοδιάνυσμα (2,1,2) που αποτελεί βάση του ιδιοχώρου E={(2,1,2)}

Τα διανύσματα (1,-2,0) , (0,-2,1) & (2,1,2)είναι
γραμμικώς ανεξάρτητα, άρα αποτελούν μία βάση του $\mathbb{R}^3$

# ΠΡΟΣΟΧΗ

Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι γραμμικώς ανεξάρτητα

**Το αντίστροφο <u>δεν</u> ισχύει**

Αν βρούμε μία διπλή ή τριπλή … ιδιοτιμή δεν σημαίνει ότι τα ιδιοδιανύσματα όλα είναι μεταξύ τους γραμμικώς ανεξάρτητα

(πρέπει να ελέγξουμε τον μέγιστο αριθμό)

# Παράδειγμα

Όμοια, να βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα για την: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$

$P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \lambda^2+1 = 0$

1. Αν A ϵ στον διανυσμ. χώρο $M_2(\mathbb{R})$, τότε δεν υπάρχουν ιδιοτιμές (αφού $\lambda^2 = -1$)
2. Αν A ϵ στον διανυσμ. χώρο $M_2(\mathbb{C})$, τότε έχει τις $\lambda_1 = i$ & $\lambda_2 = -i$, δηλ. $\sigma(\alpha) = (-i, i)$

**1η περίπτωση με $\lambda_1 = i$**, το ιδιοδιάνυσμα X είναι τ.ώ.:

$(A - \lambda \cdot I_n) \cdot X = O \Leftrightarrow \ldots. \ldots. \Leftrightarrow (x, y) = x \cdot (1, i-2)$

**2η περίπτωση με $\lambda_2 = -i$**, το ιδιοδιάνυσμα X είναι τ.ώ.:

$(A - \lambda \cdot I_n) \cdot X = O \Leftrightarrow \ldots. \ldots. \Leftrightarrow (x, y) = x \cdot (-1, i+2)$

$i^2 = -1 \Leftrightarrow i = \sqrt{-1}$

# Άσκηση

Όμοια, να βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα για την:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Υπόδειξη**:
Δείτε το προηγούμενο παράδειγμα
Λύση:
Για $\lambda_1 = -i \rightarrow (x, y) = x(1, i)$
Για $\lambda_2 = i \rightarrow (x, y) = x(-1, i)$

# Θεώρημα: Ιδιοτιμές δυνάμεων μήτρας

Έστω X ένα ιδιοδιάνυσμα για την λ ιδιοτιμή της μήτρας A:
το X είναι ιδιοδιάνυσμα της για την $\lambda^{\kappa}$ ιδιοτιμή της $A^{\kappa}$

($\kappa \in \mathbb{Z}^{+}$)

**Παράδειγμα**:

Σε προηγούμενο παράδειγμα βρήκαμε ότι η $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
έχει τις ιδιοτιμές $\lambda_1$=-1 (διπλή) και $\lambda_2$=8
με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $[1\ -2\ 0]^T$ , $[0\ -2\ 1]^T$ & $[2\ 1\ 2]^T$

Από το θεώρημα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι:

- τα $[1\ -2\ 0]^T$ , $[0\ -2\ 1]^T$ είναι ιδιοδιανύσματα της $A^5$ για την $\lambda'_1=1^5=1$
- το $[2\ 1\ 2]^T$ είναι ιδιοδιάνυσμα της $A^3$ για την $\lambda'_2=8^3=512$

κ.ο.κ.