Μιγαδικοί αριθμοί

Στοιχεία Μιγαδικών

Το πρόβλημα

Η εξίσωση $a \cdot x^2+b \cdot x+c=0$ με $\Delta < 0$ δεν έχει λύσεις στο $\mathbb{R}$, π.χ. η $x^2 = -1$

Για να ξεπεραστεί η αδυναμία ο Ιταλός Τζερόλαμο Καρντάνο δημιούργησε τους μιγαδικούς με μία διεύρυνση αριθμών του $\mathbb{R}$, το $\mathbb{C}$, τους οποίους ονόμασε «φανταστικούς αριθμούς» έτσι ώστε η $x^2 = -1$ να έχει τουλάχιστον μία ρίζα, την φανταστική μονάδα i: $i^2 = -1$

Ορισμοί:

- Ορίζουμε ως φανταστικό αριθμό ένα αριθμό της μορφής $\beta \cdot i$, $\beta \in \mathbb{R}$
  - Το σύνολο των φανταστικών αριθμών το συμβολίζουμε με ‖
  - Παράδειγμα: $4i$, $-2i$, $\frac{2}{3}i$, κ.λπ.
- Ορίζουμε ως μιγαδικό αριθμό, κάθε αριθμό της μορφής $\alpha+\beta \cdot i$, όπου $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$
  - Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών το συμβολίζουμε με $\mathbb{C}$
  - Παράδειγμα: $-2+4i$, $\frac{2}{3} -2i$, $4-\frac{2}{3}i$, κ.λπ.

Ορισμός

Το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών είναι ένα υπερ-σύνολο του $\mathbb{R}$:

1. επεκτείνει τις πράξεις + & · με τις ίδιες ιδιότητες
2. έχει την φανταστική μονάδα i: $i^2 = -1$ (άρα $i = \pm\sqrt{-1}$)
3. κάθε $z \in \mathbb{C}$ γράφεται με μοναδικό τρόπο:

$$\boxed{z = \alpha + \beta \cdot i}$$

a=Re(z), το πραγματικό μέρος

β=Im(z), το φανταστικό μέρος

δηλ. $\mathbb{C} = \{z: z=\alpha + \beta \cdot i \quad \text{με} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ \& \ i^2 = -1\}$

Παράδειγμα: ο μιγαδικός αριθμός -2+4i έχει τον Re(-2+4i) = -2 ως το πραγματικό του μέρος και τον Im(2+4) = 4 ως το φανταστικό του μέρος

Ισότητα μιγαδικών

Έστω a, b, c, d $\in \mathbb{R}$, τότε δύο μιγαδικοί αριθμοί $z_1=a + b\cdot i$ και $z_2= c + d\cdot i$ είναι ίσοι όταν $a = c$ και $b = d$

Παράδειγμα:

Ποια η τιμή των x και y ώστε οι επόμενοι μιγαδικοί αριθμοί να είναι μεταξύ τους ίσοι ($x, y \in \mathbb{R}$);

$z_1= -2x + 4y\cdot i$ και $z_2= x-2 + (y-1)\cdot i$

Απάντηση:

Πρέπει τα πραγματικά μέρη να είναι ίσα και τα φανταστικά αντίστοιχα, δηλ.

$-2x = x-2$ και $4y = y-1$, ήτοι $x = 2/3$ και $y = -1/3$

Πρόσθεση μιγαδικών

Έστω a, b, c, d $\in \mathbb{R}$, τότε το άθροισμα δύο μιγαδικών $z_1=a + b\cdot i$ και $z_2= c + d\cdot i$ αριθμών δίνεται από την σχέση:

$$z_1 + z_2= (a + b\cdot i) + (c + d\cdot i) = (a + b) + (c + d)\cdot i$$

$$z_1 - z_2= (a + b\cdot i) - (c + d\cdot i) = (a - c) + (b - d)\cdot i$$

Ιδιότητες πρόσθεσης

1. Αντιμεταθετική: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
2. Προσεταιριστική: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
3. Υπάρχει ένας και μόνο ένας μιγαδικός z': $z + z' = z$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$

   Αυτός ο αριθμός είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης των μιγαδικών, ήτοι: $z' = 0 + 0 \cdot i$ (συμβολίζεται με το 0)

4. Υπάρχει ένας και μόνο ένας μιγαδικός z^*: $z + z^* = 0$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$

   Αυτός ο αριθμός είναι ο αντίθετος του μιγαδικού z

   (Αν $z = a + b\cdot i$ τότε $\mathbf{z^*} = -a + (-b)\cdot i = - a - b\cdot i = \mathbf{- z}$)

Πολλαπλασιασμός μιγαδικών

Έστω a, b, c, d $\in \mathbb{R}$, τότε το γινόμενο δύο μιγαδικών αριθμών $z_1 = a + b \cdot i$ και $z_2 = c + d \cdot i$ δίνεται από την σχέση:

$$z_1 \cdot z_2 = (a + b \cdot i) \cdot (c + d \cdot i) = (ac - bd) + (ad + bc) \cdot i$$

Ιδιότητες γινόμενου

1. Αντιμεταθετική: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
2. Προσεταιριστική: $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$
3. Υπάρχει ένας και μόνο ένας μιγαδικός z': $z \cdot z' = z$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$

   Αυτός ο αριθμός είναι το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού των μιγαδικών, ήτοι: $z' = 1 + 0 \cdot i$ (συμβολίζεται με το 1)
4. Υπάρχει ένας και μόνο ένας μιγαδικός z^*: $z \cdot z^* = 1$, για κάθε $z \in \mathbb{C}^*$

   Αυτός ο αριθμός είναι ο αντίστροφος του μιγαδικού z

   (Αν $z = a + b \cdot i$ τότε $\mathbf{z^*} = 1/(a + b \cdot i) = \mathbf{1/z}$)

Πηλίκο μιγαδικών

Έστω a, b, c, d ϵ $\mathbb{R}$, τότε το πηλίκο δύο μιγαδικών αριθμών z_1=a + b·i και z_2= c + d·i δίνεται από την σχέση: z_1 / z_2 , το οποίο σε μορφή μιγαδικού παρουσιάζεται:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\mathrm{a+bi}}{\mathrm{c+di}} = \frac{\mathrm{(a+bi)\cdot(c\text{-}di)}}{\mathrm{(c+di)\cdot(c\text{-}di)}} = \frac{\mathrm{(ac+bd)+(bc\text{-}ad)i}}{\mathrm{c^2+d^2}} = \frac{\mathrm{ac+bd}}{\mathrm{c^2+d^2}} + \frac{\mathrm{bc\text{-}ad}}{\mathrm{c^2+d^2}}\mathrm{i}$$

<u>Σημείωση</u>: Το πηλίκο z_1 / z_2 συμβολίζεται και ως $z_1 \cdot z_2^{-1}$

Άσκηση:

Αν z_1=a + b·i και z_2= c + d·i :

να μετατρέψετε το πηλίκο z_1 / z_2 σε μορφή $Re(z_1/z_2)$ + $Im(z_1/z_2)$

Δυνάμεις μιγαδικών

Έστω a, b $\in \mathbb{R}$, τότε ορίζουμε τη δύναμη σε ακέραιο αριθμό κ του μιγαδικού αριθμού $z = a + b \cdot i$:

$$z^{\kappa} = z^{\kappa-1} \cdot z$$

Σημείωση: Για $z \in \mathbb{C}^*$:

- $z^0 = 1$
- Αν $\kappa > 0$, τότε $z^{-\kappa} = 1/ z^{\kappa}$

Ιδιότητες δυνάμεων

$$i^0 = 1$$

$i^1 = i$ $\quad i^2 = -1$ $\quad i^3 = i^2 \cdot i = -i$ $\quad i^4 = 1$ 4 βήματα

$i^5 = i$ $\quad i^6 = -1$ $\quad i^7 = -i$ $\quad i^8 = 1$ κ.ο.κ. 4 βήματα

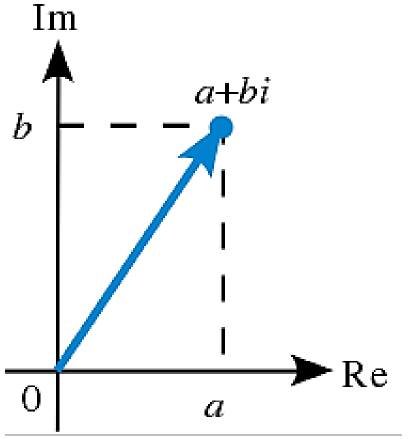
Ασκήσεις

1. Αν $z = (2-3 \cdot i)$, να βρείτε το z^2 και το z^3

2. Να υπολογίσετε την τιμή των φανταστικών αριθμών:
    - $-3 \cdot i^{14}$
    - $-1 \cdot i^{29}$

Οι μιγαδικοί γεωμετρικά

Κάθε **z = a + b · i** x, y ϵ ℝ & $i^2 = -1$ παριστάνεται με ένα σημείο, π.χ. M(a, b), όπως επίσης και με την διανυσματική ακτίνα OM του σημείου M



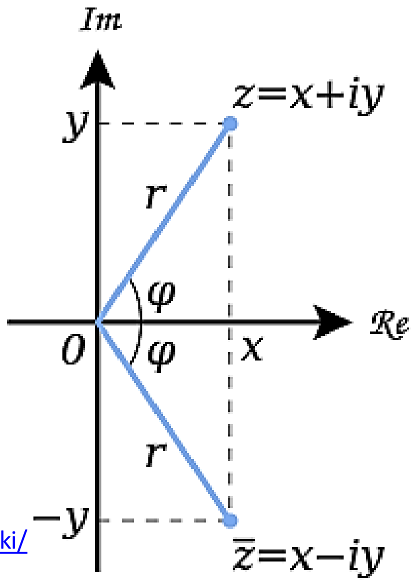
εικόνα:https://el.wikipedia.org/wiki/Μιγαδικός_αριθμός

Ορισμός: Αν z=x+y·i μιγαδικός, τότε ο ẑ=x – y·i λέγεται συζυγής του z

Πόρισμα:

$z \cdot \hat{z} = (x+yi) \cdot (x-yi) = x^2+y^2$

$z + \hat{z} = 2x$

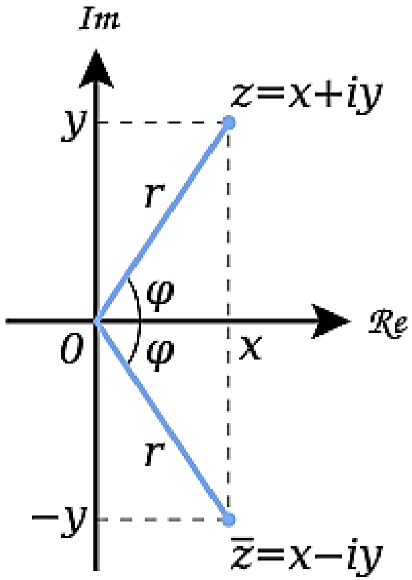


εικόνα: https://el.wikipedia.org/wiki/Συζυγής_μιγαδικός_αριθμός

Ιδιότητες συζυγών

- $|z|^2 = z\bar{z}$
- $|z| = |\bar{z}| = |-z| = |\overline{-z}|$
- $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$
- $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$
- $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$
- $\bar{z} = z$ αν και μόνο αν $Im(z) = 0$
- $\bar{z} = -z$ αν και μόνο αν $Re(z) = 0$
- $\overline{(\bar{z})} = z$
- $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2},\ z \neq 0$

$\overline{(z^{\nu})} = (\bar{z})^{\nu}$



εικόνα: https://el.wikipedia.org/wiki/Συζυγής_μιγαδικός_αριθμός

Για να εκφράσουμε ένα κλάσμα μιγαδικών σε μορφή α+βi, πολλαπλασιάζουμε και τους 2 όρους με τον συζυγή του παρονομαστή

Συζυγείς συντεταγμένες

Αν $z=a + b\cdot i$ μιγαδικός αριθμός ($a, b \in \mathbb{R}$), τότε μπορούμε να εκφράσουμε το $Re(z)$ και το $Im(z)$ συναρτήσει των z και $\hat{z} = a - b\cdot i$ (τον συζυγή):

$$a = \frac{z+\hat{z}}{2} \quad \& \quad b = \frac{z-\hat{z}}{2i}$$

Άσκηση

Να βρεθεί το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών z στις περιπτώσεις κατά τις οποίες ο αριθμός $\frac{z-1}{z-2i}$ είναι α) φανταστικός β) πραγματικός.

Απάντηση

α) τα σημεία του κύκλου με κέντρο $K\left(\frac{1}{2},1\right)$ και ακτίνα $\frac{\sqrt{5}}{2}$, με εξαίρεση το σημείο $A(0,2)$

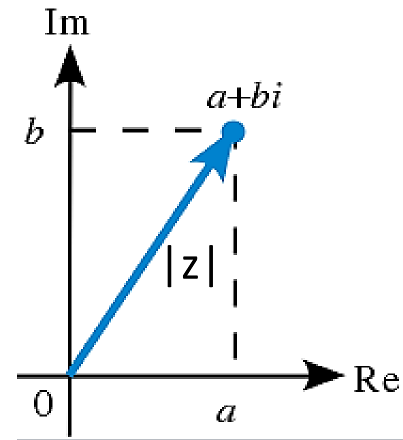
β) τα σημεία της ευθείας με εξίσωση 2x+y-2=0, με εξαίρεση το σημείο A(0,2).

Μέτρο μιγαδικού

Ορισμός: Αν z = a + b·i, ορίζουμε μέτρο του z, την απόσταση του σημείου από το Ο, δηλ.:

$$|z| = |OM| = |a + b\cdot i| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Παράδειγμα: $|3-4i|=5$



εικόνα:https://el.wikipedia.org/wiki/Μιγαδικός_αριθμός

Ιδιότητες του μέτρου

1. $|z| = |\hat{z}| = |-z|$
2. $|z|^2 = z \cdot \hat{z}$
3. $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$
4. $|z / z'| = |z| / |z'|$
5. $||z|-|z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$

Γενικά, αποδεικνύεται ότι

$$|z_1 z_2 \ldots z_\nu| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \ldots \cdot |z_\nu|$$

και ειδικότερα

$$|z^\nu| = |z|^\nu$$

Ασκήσεις

1. Βρείτε το μέτρο των παρακάτω μιγαδικών αριθμών:

- $4-3i$
- $\dfrac{1+2i}{2+3i}$
- $(4-3i)^2$

2. Ποιος πρέπει να είναι ο μιγαδικός αριθμός z ώστε να ισχύει ότι: $|z-1| = |z-2| = |z-i|$

3. Στο $\mathbb{R}$ ισχύει ότι αν $\alpha^2+\beta^2=0$, τότε $\alpha=\beta=0$. Αποδείξτε ότι **δεν** ισχύει στους μιγαδικούς.

Υπόδειξη: Αν z,z': $z^2+z'^2=0$ ή $z^2-(i\cdot z')^2=0$ κ.λπ.