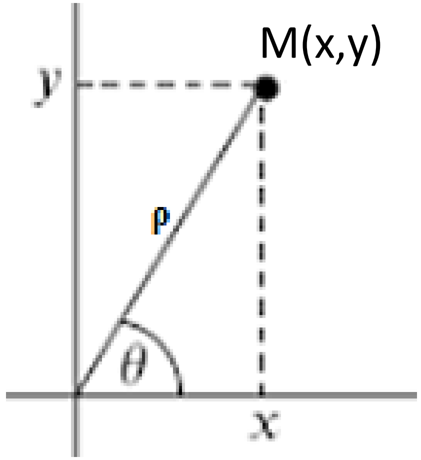
Μορφές μιγαδικών αριθμών

Στοιχεία Μιγαδικών

Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού

Ορισμός: Έστω z=x+y·i μιγαδικός ≠ 0 με ΟΜ την αντίστοιχη διανυσματική ακτίνα



Όρισμα του z είναι οι γωνίες του ΟΜ με τον Re(z)

$\theta + 2\kappa\pi,\ \kappa \in \mathbb{Z}$

Για z=0 δεν ορίζεται όρισμα

Από όλα τα ορίσματα η γωνία ∈ [0, 2π) = θ λέγεται πρωτεύον όρισμα του z (= Arg(z))

(Δύο ορίσματα του z διαφέρουν κατά 2κπ, κ ∈ $\mathbb{Z}$)

Το μέτρο του $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho$

cosθ = προσκείμενη / υποτείνουσα
sinθ = απέναντι / υποτείνουσα

και αν θ ένα όρισμα τότε $\cos\theta = \frac{x}{\rho}$ και $\sin\theta = \frac{y}{\rho}$ **(Ι)**

η τριγωνομετρική ή πολική μορφή του z (polar form)

Από την (Ι): z=x+y·i ⇔ z=ρ·cosθ+ρ·sinθ·i ⇔ $\boxed{z=\rho\cdot(\cos\theta+\cdot i\cdot\sin\theta)}$

Παράδειγμα

Έστω $z = -\sqrt{3} + i$

Αφού ρ=2 και αν θ ένα όρισμα, τότε ισχύουν:

$$\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ και } \sin\theta = \frac{1}{2}$$

Άρα μία τιμή του θ είναι θ=5π/6 και η τριγωνομετρική μορφή του z είναι:

$$z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\cdot\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

& γενικά:

$$z = -\sqrt{3} + i = = 2\cdot\left[\cos\left(2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}\right) + i\cdot\sin\left(2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}\right)\right]$$

$\kappa \in \mathbb{Z}$

Ιδιότητες τριγωνομετρικής μορφής

1. $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \rho' \\ \theta - \theta' = 2\kappa\pi, \ \kappa \in \mathbb{Z} \end{cases}$

"Δύο μη μηδενικοί μιγαδικοί αριθμοί είναι ίσοι, αν και μόνο αν έχουν ίσα μέτρα και η διαφορά των ορισμάτων τους είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π".

2. $z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2 \cdot [\cos(\theta_1+\theta_2) + i\cdot\sin(\theta_1+\theta_2)]$

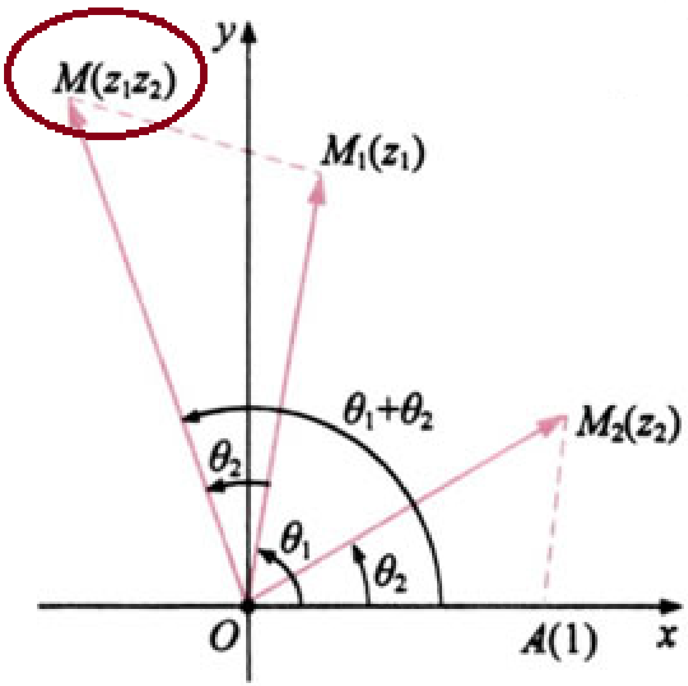
3. $z_1 / z_2 = (\rho_1 / \rho_2) \cdot [\cos(\theta_1-\theta_2) + i\cdot\sin(\theta_1-\theta_2)]$

Υπενθύμιση:
cos(a+b)=cosa·cosb–sina·sin b
cos(a–b)=cosa·cosb+sina·sin b
sin(a±b)=sina·cosb±cosa·sin b

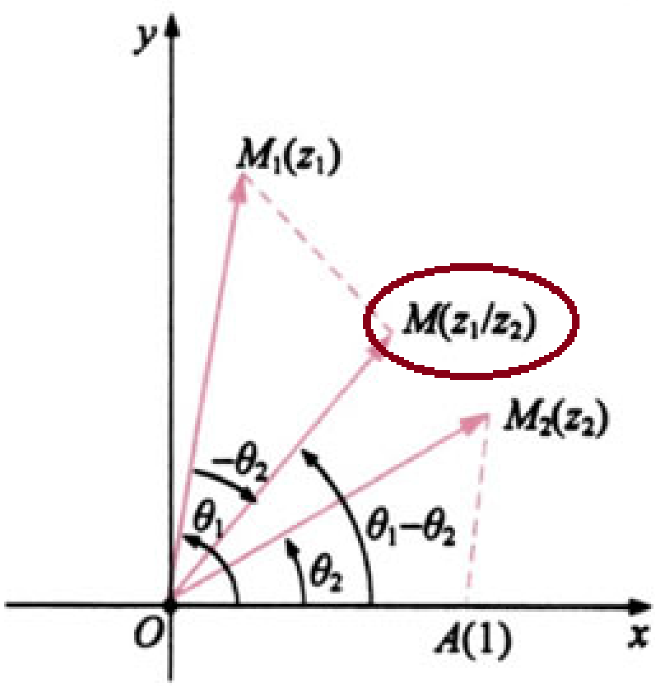
Άσκηση: Να αποδείξετε την 2η και την 3η ιδιότητα

Γεωμετρική ερμηνεία

Η **γεωμετρική ερμηνεία του [γινομένου]() και του [πηλίκου]() δύο μιγαδικών αριθμών** δίνεται από τα αντίστοιχα επόμενα σχήματα:



Τα τρίγωνα OAM_2 και OM_1M είναι όμοια



Τα τρίγωνα OAM_2 και OMM_1 είναι όμοια

βλ. http://ebooks.edu.gr/modules/ebook/show.php/DSGL-C105/492/3196,12967/

Παράδειγμα

Αν $z_1 = 2\left(\text{συν}\,\frac{2\pi}{3} + i\,\text{ημ}\,\frac{2\pi}{3}\right)$ και $z_2 = 3\left(\text{συν}\,\frac{11\pi}{6} + i\,\text{ημ}\,\frac{11\pi}{6}\right)$

Τότε:

$$z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot 3\left[\text{συν}\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{11\pi}{6}\right) + i\,\text{ημ}\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{11\pi}{6}\right)\right] = 6\left(\text{συν}\,\frac{5\pi}{2} + i\,\text{ημ}\,\frac{5\pi}{2}\right) = 6i$$

και

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3}\left[\text{συν}\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{11\pi}{6}\right) + i\,\text{ημ}\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{11\pi}{6}\right)\right] = \frac{2}{3}\left[\text{συν}\left(\frac{-7\pi}{6}\right) + i\,\text{ημ}\left(\frac{-7\pi}{6}\right)\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{3} + i\,\frac{1}{3}.$$

Θεώρημα του Moivre

Έστω $z = \rho \cdot (\cos\theta + i \cdot \sin\theta)$ και $\nu \in \mathbb{Z}^+$, τότε:

$$\mathbf{z^{\nu} = \rho^{\nu} \cdot [\cos(\nu\cdot\theta)+i\cdot\sin(\nu\cdot\theta)]}$$

Απόδειξη: (με την μέθοδο της επαγωγής)

- Για ν=1, τότε $z=\rho\cdot(\cos\theta+i\cdot\sin\theta)$, που ισχύει
- Έστω ισχύει για ν, δηλ. $z^{\nu} = \rho^{\nu}\cdot[\cos(\nu\cdot\theta)+i\cdot\sin(\nu\cdot\theta)]$, θα δείξουμε ότι ισχύει για ν+1
- $z^{\nu+1} = z^{\nu}\cdot z^{1} = \rho^{\nu}\cdot[\cos(\nu\cdot\theta)+i\cdot\sin(\nu\cdot\theta)]\cdot \rho\cdot(\cos\theta+i\cdot\sin\theta) =$

  $= \rho^{\nu+1}\cdot\{\cos[(\nu+1)\cdot\theta]+i\cdot\sin[(\nu+1)\cdot\theta]\}$, που ισχύει

Υπενθύμιση:
cos(a+b)=cosa · cosb–sina · sin b
cos(a–b)=cosa · cosb+sina · sin b
sin(a±b)=sina · cosb±cosa · sin b

Παράδειγμα: $\text{Αν } z=2(\cos\frac{\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{\pi}{6})$

$$\textit{τότε}: \quad z^4 = 2^4(\cos\frac{4\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{4\pi}{6})=16(\cos\frac{2\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{2\pi}{3})$$

Παρατήρηση

Το θεώρημα του Moivre ισχύει και για εκθέτη αρνητικό, δηλ.:

$$\mathbf{z^{-\nu} = \rho^{-\nu} \cdot [\cos(-\nu\cdot\theta)+i\cdot\sin(-\nu\cdot\theta)]}$$

Απόδειξη:

$$[p\cdot(\cos\theta + i\sin\theta)]^{-\nu} = \frac{1}{[p\cdot(\cos\theta + i\sin\theta)]^{\nu}} =$$

Προσοχή: μηδέν και όχι θ

$$= \frac{1}{p^{\nu}\cdot(\cos\theta + i\sin\theta)^{\nu}} = \frac{1\cdot(\cos 0 + i\sin 0)}{p^{\nu}\cdot[\cos(\nu\theta) + i\sin(\nu\theta)]} =$$

$$= p^{-\nu}\cdot[\cos(0-\nu\theta) + i\sin(0-\nu\theta)] =$$

$$= p^{-\nu}\cdot[\cos(-\nu\theta) + i\sin(-\nu\theta)]$$

Άσκηση

Αν $z = -\sqrt{3} + i$, να βρείτε το z^{1998}

Υπόδειξη:

1. Μετατρέψτε πρώτα τον μιγαδικό στην τριγωνομετρική του μορφή με το πρωτεύον μέρισμα
2. Στη συνέχεια κάντε χρήση του θεωρήματος του Moivre για να υπολογίσετε τη δύναμη

Λύση

$$z=2[\cos(\frac{5\pi}{6})+i\cdot\sin(\frac{5\pi}{6})]$$

$$\text{Άρα } z^{1998}=2^{1998}\cdot[\cos(1998\frac{5\pi}{6})+i\cdot\sin(1998\frac{5\pi}{6})]=$$

$$=2^{1998}\cdot[\cos(333\cdot 5\pi)+i\cdot\sin(333\cdot 5\pi)]=2^{1998}\cdot(\cos\pi+i\cdot\sin\pi)=$$

$$=-2^{1998}$$

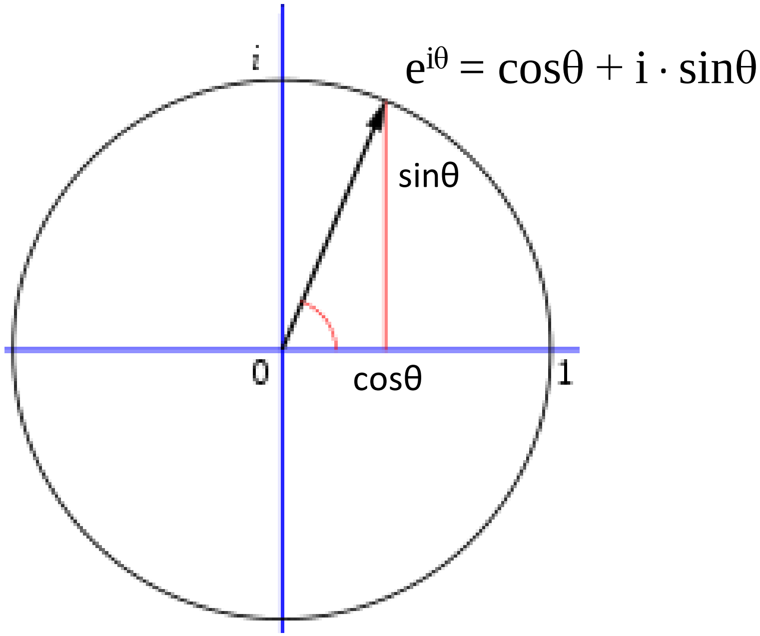
Διότι:
$\cos(333 \cdot 5\pi) = \cos 1665\pi = \cos\pi = -1$
$\sin(333 \cdot 5\pi) = \sin 1665\pi = \sin\pi = 0$
εφόσον 1665=1664+1=(2*832)+1

Μορφή Euler (Εκθετική μορφή)

Ο Euler μας λέει ότι για **κάθε πραγματικό αριθμό θ** (σε ακτίνια) ισχύει η επόμενη εκθετική μορφή:

$$\mathbf{e^{i\theta} = \cos\theta + i \cdot \sin\theta}$$

Γεωμετρική ερμηνεία:



Άρα κάθε μιγαδικός μπορεί να γραφτεί στην εκθετική μορφή:

$$\boxed{\mathbf{z} = |z|\cdot(\cos\theta + i\cdot\sin\theta) = \mathbf{|z|\cdot e^{i\theta}}}$$ με θ = Arg(z)

cos & sin από την μορφή Euler

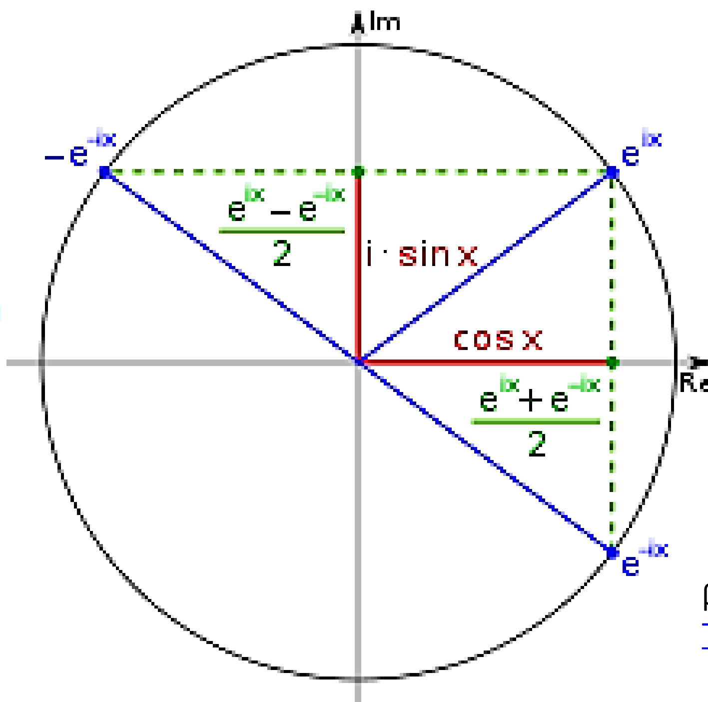
(1) $e^{i\theta} = \cos\theta + i\cdot\sin\theta$

(2) $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\cdot\sin\theta$

εφόσον
$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\cdot\sin(-\theta) = \cos(\theta) - i\cdot\sin(\theta)$

(1) & (2) $\begin{cases} e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta \\ e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2\, i\cdot\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \boxed{\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \& \quad \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$

Σχέση μεταξύ ημιτόνου, συνημιτόνου και εκθετικής συνάρτησης



βλ. https://el.wikipedia.org/wiki/Τύπος_του_Όιλερ

Πράξεις με την εκθετική μορφή

1. Αν $n \in \mathbb{Z}$, τότε $z^n = \rho^n \cdot e^{in\theta}$

2. $\hat{z} = \rho \cdot e^{-i\theta}$

3. $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \rho' \ \& \\ \theta - \theta' = 2\kappa\pi, \ \kappa \in \mathbb{Z} \end{cases}$

4. $z \cdot z' = \rho \cdot \rho' \cdot e^{i(\theta+\theta')}$

5. $z / z' = (\rho / \rho') \cdot e^{i(\theta-\theta')}$

6. $z^{-1} = (1/\rho) \cdot e^{-i\theta}$

Παράδειγμα

$$\text{Αν } z_1 = -\sqrt{3}+i,\ z_2 = 1+\sqrt{3}\cdot i$$

$$\text{Βρείτε τα: } z_1 \cdot z_2 \quad \& \quad z_1 / z_2$$

Απάντηση:

$$z_1 = -\sqrt{3}+i = 2\ (\cos\frac{5\pi}{6} + i\cdot\sin\frac{5\pi}{6})$$

$$z_2 = 1+\sqrt{3}\cdot i = 2\ (\cos\frac{\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{\pi}{3})$$

Άρα:

$$z_1 \cdot z_2 = 4(\cos(\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{3}) + i\cdot\sin(\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{3})) = 4(\cos\frac{7\pi}{6} + i\cdot\sin\frac{7\pi}{6})$$

$$z_1 / z_2 = \cos(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}) + i\cdot\sin(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}) = \cos\frac{\pi}{2} + i\cdot\sin\frac{\pi}{2}$$

Ορισμός ν-τάξης ρίζας μιγαδικού

Νιοστή ρίζα ενός μιγαδικού αριθμού $z=a+b\cdot i$, ορίζεται κάθε μιγαδικός $\zeta=x+y\cdot i$ τ.ώ. $\zeta^{\nu} = z$, δηλ.

$$(x+y\cdot i)^{\nu} = a+b\cdot i$$

$\nu\ n \in \mathbb{Z}^{+}$

Υπενθύμιση: **Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας**
'Κάθε μη μηδενικό πολυώνυμο μίας μεταβλητής και βαθμού *n* *με μιγαδικούς συντελεστές* έχει ακριβώς *n μιγαδικές ρίζες*'

Αν $z=\rho\cdot(\cos\theta+i\cdot\sin\theta)$, $z\neq 0$, τότε :

υπάρχουν ακριβώς ν διαφορετικές ρίζες

$$\boxed{z_{\kappa}=\sqrt[\nu]{\rho}\cdot\left(\cos\frac{\theta+2\kappa\pi}{\nu}+i\cdot\sin\frac{\theta+2\kappa\pi}{\nu}\right),\ \kappa=0..\nu\text{-}1}$$

δηλ. επαληθεύουν την εξίσωση: $\boldsymbol{\zeta^{\nu} = z}$, όπου $\zeta \in \mathbb{C}^{*}$

Άσκηση

Να βρεθούν οι κυβικές ρίζες του $z=\sqrt{2}+i\cdot\sqrt{2}$

Λύση:

Η πολική μορφή του $z=2(\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{\pi}{4})$, άρα οι κυβικές του ρίζες:

$$z_0=\sqrt[3]{2}\cdot(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2\cdot 0\cdot\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2\cdot 0\cdot\pi}{3})=\sqrt[3]{2}\cdot(\cos\frac{\pi}{12}+i\cdot\sin\frac{\pi}{12})$$

- Οι z_1 & z_2 να λυθούν ως άσκηση

Οι 3 ρίζες z_0, z_1, z_2 διαιρούν τον κύκλο Κ(0, $\sqrt[3]{2}$) σε 3 ίσα τόξα (γωνίας 2π/3)

Διωνυμική εξίσωση

Διωνυμική λέγεται κάθε εξίσωση της μορφής:

$$\boxed{z^{\nu} = \zeta} \quad \zeta \in \mathbb{C}^{*} \ \& \ \nu \text{ n} \in \mathbb{Z}^{+}$$

Παράδειγμα: Να λύσετε την $z^5 = -32 \cdot i$

Λύση:

Εφόσον το $-i = \cos(-\frac{\pi}{2}) + i \cdot \sin(-\frac{\pi}{2})$

Άρα $z^5 = -32 \cdot i = 32[\cos(-\frac{\pi}{2}) + i \cdot \sin(-\frac{\pi}{2})]$

Άρα από τον ορισμό της ρίζας ν-οστής τάξης:

$$z_k = \sqrt[5]{32}[\cos(\frac{2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}}{5}) + i \cdot \sin(\frac{2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}}{5})] \text{ για k=0...4}$$