Ορισμός

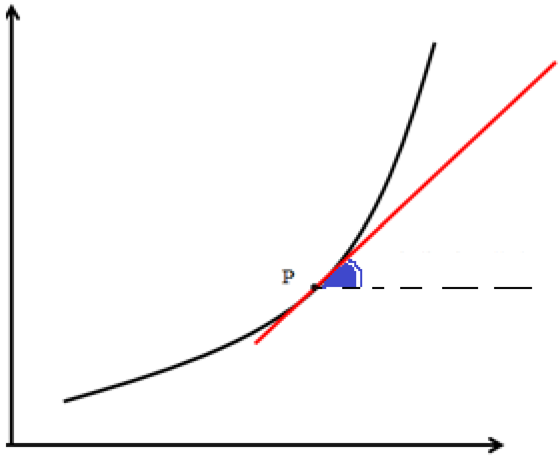
Διαφορικός Λογισμός

μιας μεταβλητής Ι

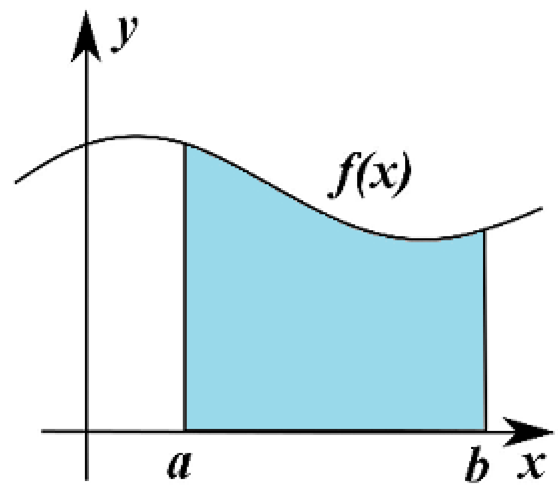
Τι είναι ο Λογισμός

Ο ‘Λογισμός’ ασχολείται κυρίως με 2 θεμελιώδη γεωμετρικά προβλήματα. Και τα 2 διερευνώνται για περισσότερο από 2000 έτη:

1.Το πρόβλημα της εφαπτομένης:
Έστω η καμπύλη y=f(x) και σημείο P(x,f(x)).
«*Πώς μπορούμε να βρούμε την κλίση της καμπύλης στο P;*»



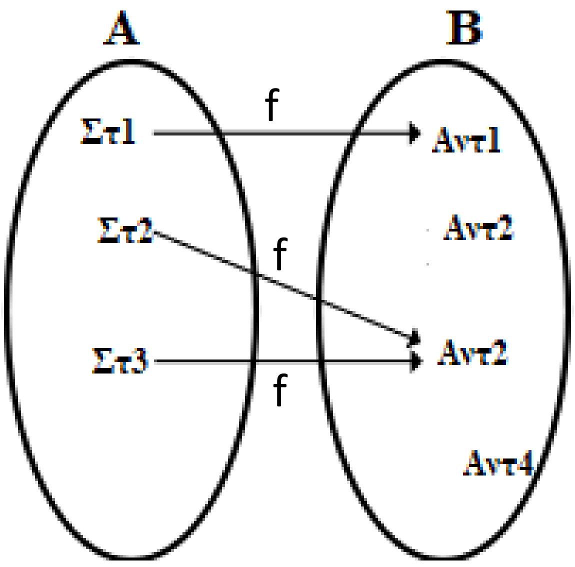
2.Το πρόβλημα του εμβαδού:
Έστω y=f(x) ≥ 0 για x ϵ [a, b]
«*Πώς μπορούμε να βρούμε το εμβαδόν που περικλείεται από την καμπύλη y=f(x) και τον άξονα xx’ στο [a, b];*»



Συνάρτηση

Ορισμός:

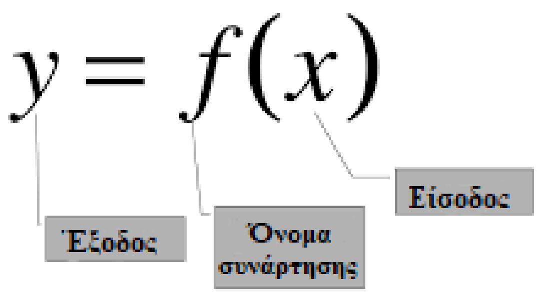
Συνάρτηση f από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B είναι μια αντιστοίχιση η οποία σε κάθε σημείο του A αντιστοιχεί ΕΝΑ ΜΟΝΟ στοιχείο του B, και συμβολ. f: $\begin{cases} A \rightarrow B \\ x \mapsto y=f(x) \end{cases}$



- **A** είναι το 'Πεδίο Ορισμού' της f (η είσοδος)
  όπου το x είναι η 'ανεξάρτητη μεταβλητή'
- **B** είναι το 'Πεδίο Τιμών' της f (η έξοδος)
  όπου το y είναι η 'εξαρτημένη μεταβλητή'
- **f** είναι ο 'κανόνας' που κάνει την αντιστοίχιση

Παραδείγματα:

<u>ανεξάρτητης μεταβλ.</u> –	<u>εξαρτημένη μεταβλ.</u>
υψόμετρο	σημείο βρασμού
επιτόκιο	$ στον λογαριασμό



Συνάρτηση (συνέχεια)

Έστω η συνάρτηση f από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β

- Αν $A \subseteq \mathbb{R}$, τότε η f λέγεται συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής
- Αν $f(A) \subseteq \mathbb{R}$, τότε η f λέγεται συνάρτηση πραγματικών τιμών

Παραδείγματα:

1) $f(x)=x^2$ συνάρτηση με Π.Ο.$=\mathbb{R}$ & Π.Τ.$=\mathbb{R}^+$

2) $f(x)=\dfrac{2x}{3x+2}$ συνάρτηση με Π.Ο.$=\mathbb{R}\setminus\{-\dfrac{2}{3}\}$ & Π.Τ.$=\mathbb{R}$

3) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ συνάρτηση με Π.Ο.$=[-1,1]$ & Π.Τ.$=[0,1]$

Παρατήρηση: Για τα σύνολα Π.Ο. & Π.Τ. χρησιμοποιούνται διαστήματα. Τα ακραία σημεία αυτών λέγονται 'συνοριακά σημεία'

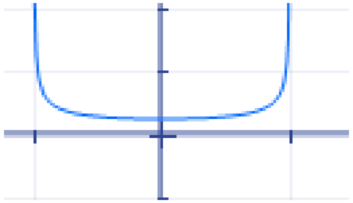
π.χ.: $(\alpha,+\infty)$, $[\alpha,+\infty)$, $(-\infty,+\infty)$, $(-\infty,\beta)$, $(-\infty,\beta]$ κ.ά.

Άσκηση: Δώστε τα Π.Ο.& τα Π.Τ. των: $y=1/x$, $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{4-x}$

Γραφική παράσταση

Γράφημα ή γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $y=f(x)$ είναι η τοποθέτηση των σημείων $(x,f(x))$ στο επίπεδο

Παράδειγμα: Ποιό το γράφημα της $y=f(x)=1/\sqrt{4-x^2}$



Για να ισχύει πρέπει $4-x^2>0 \Leftrightarrow x^2<4 \Leftrightarrow -2<x<2$ ή $x \in (-2,+2)$

Παρατήρηση: Πάντα κοιτάμε τι συμβαίνει στο γράφημα καθώς
x→- ⍰ και αντίστοιχα όταν x→+ ⍰
ώστε να κρίνουμε (θεωρητικά) αν f αύξουσα ή όχι

Ασκήσεις: Δημιουργήστε τα γραφήματα των συναρτήσεων

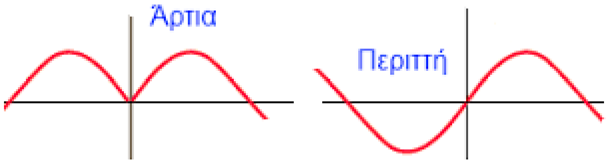
$$y=x^2, \quad y=x^3, \quad y=1/x, \quad y=\sqrt{x}, \quad y=|x|$$

Προσοχή: η τελευταία ορίζεται κατά τμήματα

ΕΡΩΤΗΣΗ: Ο κύκλος είναι γραφική παράσταση συνάρτησης;

Ορισμοί

- Η συνάρτηση $y=f(x)$ & για κάθε $x \in$ Π.Ο. λέγεται:
  - άρτια αν: $f(-x)=f(x)$
  - περιττή αν: $f(-x)= - f(x)$



Το γράφημα μιας f άρτιας συμμετρικό ως προς yy'

Το γράφημα μιας f περιττής συμμετρικό ως προς to 0

- Αμφιμονοσήμαντη: είναι η συνάρτηση που για κάθε $x_1, x_2 \in$ Π.Ο.:

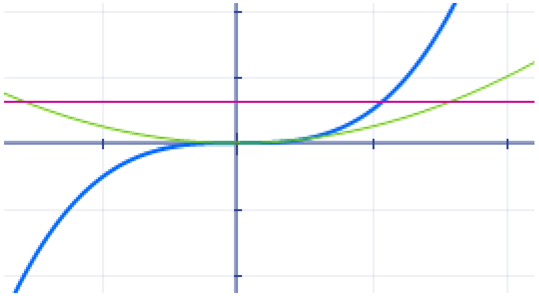
ή ένα προς ένα (1-1)

αν για $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

ή αλλιώς αν $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x1=x2$

- **Κριτήριο οριζόντιας ευθείας**: Αν μία οριζόντια ευθεία (//xx') τέμνει σε περισσότερο από 1 σημεία το γράφημα της f, τότε f ≠ (1-1)

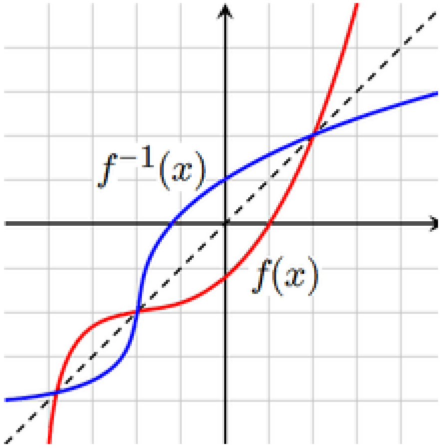
(**π.χ.** $y=x^3$:(1-1) ενώ $y=x^2$:≠ (1-1))



Εύρεση της f^{-1}

1ο βήμα: a. Λύνουμε την y=f(x) ως προς x

Αλγεβρικά b. Εναλλάσσω τα x & y



2ο βήμα : f & f^{-1} είναι συμμετρικές

Γεωμετρικά ως προς τον άξονα x = y

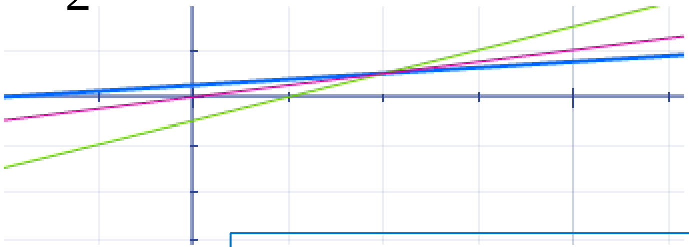
3ο βήμα : Ελέγχουμε αν

Έλεγχος (i) $f^{-1}f(x)=x$ & (ii) $f(f^{-1}(x))=x$ Κριτήριο αντιστρόφων

Παράδειγμα: Αν $y=\frac{1}{2}x+1$, ποια είναι η f^{-1};

1) $y=\frac{1}{2}x+1 \Rightarrow x=2y-2 \overset{x\leftrightarrow y}{\Rightarrow} y=2x-2$, άρα $f^{-1}(x)=2x-2$

2)



3) $f(f^{-1}(x))=\frac{1}{2}(2x-2)+1=x$

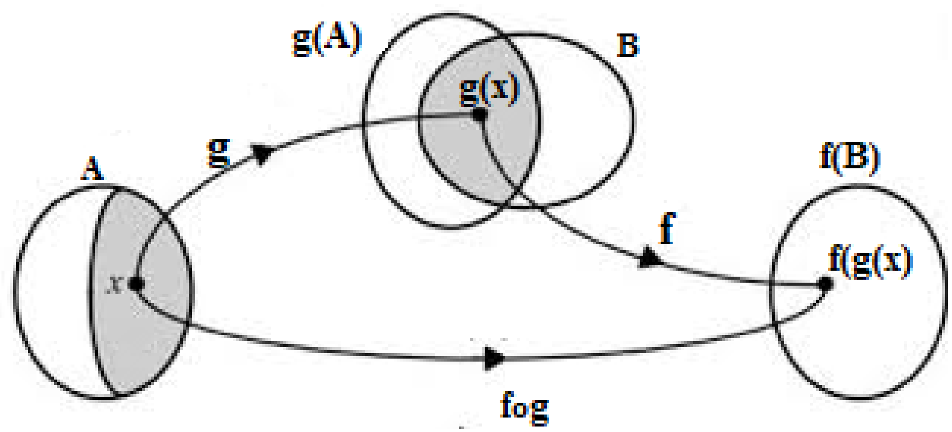
$f^{-1}(f(x))=2(\frac{1}{2}x+1)-2=x$

Άσκηση: Όμοια βρείτε την f^{-1} για την $y=x^2$, $x\geq 0$

Σύνθετες συναρτήσεις

Έστω $g: x \mapsto g(x)$

και $f: g(x) \mapsto f(g(x))$



Άρα Σύνθεση συναρτήσεων:

$$\boxed{(f \circ g)(x) = f(g(x))}$$

Παράδειγμα: Αν $f(x) = \ln x$ & $g(x)=x^{½}$, fog=; και gof=;

Π.Ο.(f)=(0,+∞) και Π.Ο.(g)=[0,+∞)

1. gof : Έστω $\begin{cases} x \in ΠΟ(f) \\ f(x) \in ΠΟ(g) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ f(x) > 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$ Άρα $x \geq 1$

Άρα $g \circ f(x) = g(f(x))=g(\ln x)=(\ln x)^{½}$, $x \in [1,+∞)$

2. Όμοια το Π.Ο. της fog: $x>0$ και $f \circ g(x)=\ln(x^{½})$, $x \in (0,+∞)$

Ασκήσεις: (**1**)Αν $g=1-x^2$ & $f=x^{½}$, fog=?
(**2**) Αν $g=x^2$ & $f=x-7$, (fog)(2)=?

Περιοδική συνάρτηση

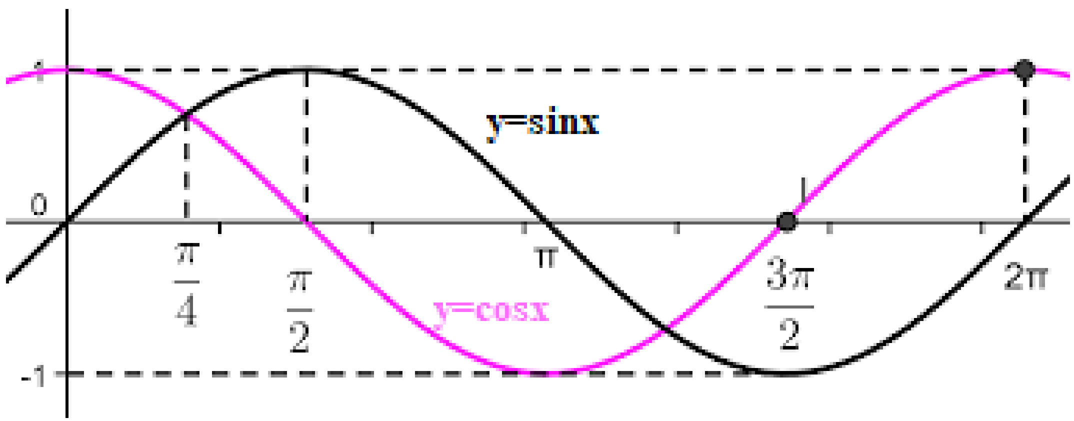
f(x) περιοδική αν υπάρχει ρ>0: f(x+ρ)=f(x), για κάθε x ϵ Π.Ο.

Η μικρότερη δυνατή τιμή της ρ λέγεται περίοδος

Παραδείγματα: Οι πιο γνωστές περιοδικές συναρτήσεις είναι οι τριγωνομετρικές, όπως:

cos(x+2π)=cosx tan(x+2π)=tanx

sin(x+2π)=sinx cot(x+2π)=cotx



y=cosx

Π.Ο.: -⍰ < x < +⍰

Π.Τ.: -1 < y < +1

Περίοδος: 2π

y=sinx

Π.Ο.: -⍰ < x < +⍰

Π.Τ.: -1 < y < +1

Περίοδος: 2π

Ασκήσεις συναρτήσεων

1. Έστω η εκθετική συνάρτηση: $f(x)=2e^{3x-2}+1$

   Να δ.ό. η f είναι αμφιμονοσήμαντη (1-1) & να βρείτε την f^{-1}

2. Να λύσετε την εξίσωση: $3^{\log_3 7} - 4^{\log_4 2} = 5^{(\log_5 x - \log_5 x^2)}$

3. Να δημιουργήσετε το γράφημα της $f(x) = \log_2 x$

Μονοτονία & ακρότατα συναρτήσεων

Ορισμός: Η f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ ⊆Π.Ο. αν:

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$, για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$

αύξουσα αν $f(x_1) \leq f(x_2)$

Αντίστοιχα η f γνησίως φθίνουσα στο Δ αν:

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$, για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$

φθίνουσα αν $f(x_1) \geq f(x_2)$

Ορισμός: Η f με Π.Ο.=Α παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο $f(x_0)$

αν $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in A$

Αντίστοιχα η f παρουσιάζει στο $x_1 \in A$ (ολικό) ελάχιστο $f(x_1)$

αν $f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in A$

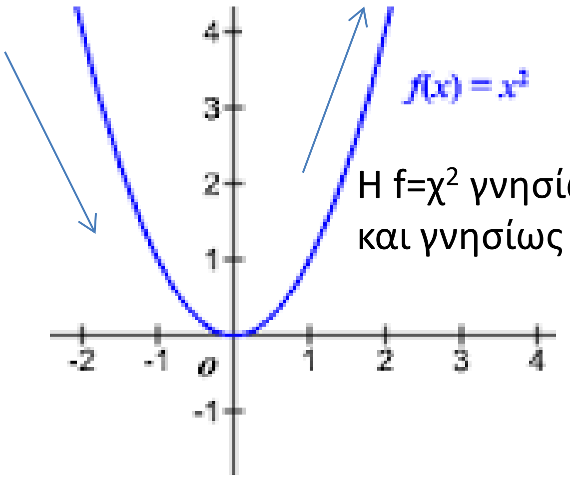
Ορισμός: Η $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ άνω φραγμένη αν:

υπάρχει φ ε $\mathbb{R}$: για κάθε $x \in D$ $f(x) \leq \varphi$

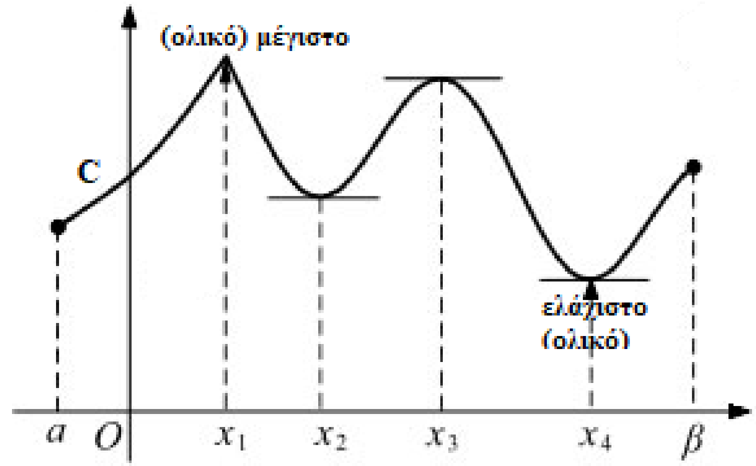
Η f κάτω φραγμένη αν υπάρχει ψ ε $\mathbb{R}$: για κάθε $x \in D$ $f(x) \geq \psi$

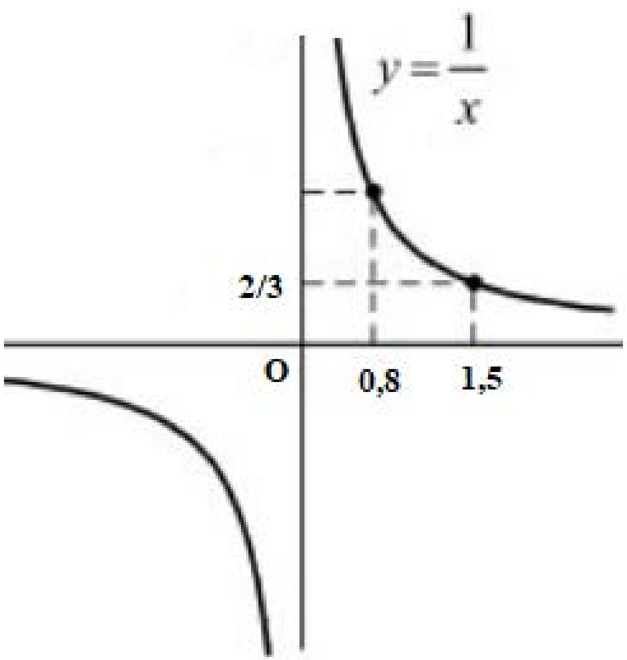
Η f φραγμένη αν είναι και άνω και κάτω φραγμένη

Παραδείγματα



Η $f=\chi^2$ γνησίως φθίνουσα στο (-∞ 0]
και γνησίως αύξουσα στο [0,+∞)





Η f = 1/x δεν είναι άνω φραγμένη
Αν όμως περιοριστώ στο διάστημα
Δ=[0.8, 1.5] τότε είναι φραγμένη άνω

Ασκήσεις: Βρείτε τα (ολικά) ακρότατα των:

1. $f(x) = -x^2+1$
2. $f(x) = |x-1|$

Πράξεις συναρτήσεων

- Αν f = g τότε: $\begin{cases} ΠΟ(f) = ΠΟ(g) \quad \& \\ f(x)=g(x), \text{ για κάθε } x \end{cases}$

- $(f \pm g)(x)=f(x) \pm g(x)$
- $(f \cdot g)(x)=f(x) \cdot g(x)$

$\left.\right\}$ με ΠΟ = ΠΟ(f)∩ΠΟ(g)

- $(f / g)(x)=f(x) / g(x)$ με ΠΟ = ΠΟ(f)∩ΠΟ(g)\{g(x)=0}

- $(f o g)(x) = f(g(x))$ με ΠΟ = {x ϵ ΠΟ(g): g(x) ϵ ΠΟ(f)}

Βασικές συναρτήσεις

Να κάνετε επανάληψη των βασικών συναρτήσεων που μάθατε στο Λύκειο και της μελέτης τους:

- Κεφ. 6 Άλγεβρα & Στοιχεία Πιθανοτήτων Α’ Λυκείου

- Κεφ. 7 Άλγεβρα & Στοιχεία Πιθανοτήτων Α’ Λυκείου

Μετατοπίσεις γραφήματος

Έστω η φ(x) για την οποία έχουμε κάνει και την γραφική της αναπαράσταση C_{ϕ}, τότε:

- αν $f(x) = \phi(x) + \kappa$ με $\kappa>0$, έχει ως γραφική αναπαράσταση την C_{ϕ} μετατοπισμένη κατά κ προς τα πάνω (άξονα yy')
  - Όμοια προς τα κάτω στον yy' αν $\kappa<0$

- αν $f(x) = \phi(x - \kappa)$ με $\kappa>0$, έχει ως γραφική αναπαράσταση την C_{ϕ} μετατοπισμένη κατά κ προς τα δεξιά (άξονα xx')
  - Όμοια προς τα αριστερά στον xx' αν $\kappa<0$

- Όμοια εργαζόμαστε βήμα – βήμα όταν έχουμε σύνθετες μορφές, π.χ. $f(x) = \phi(x \pm \lambda) \pm \kappa$