Άπειρα όρια

Διαφορικός Λογισμός
μιας μεταβλητής Ι

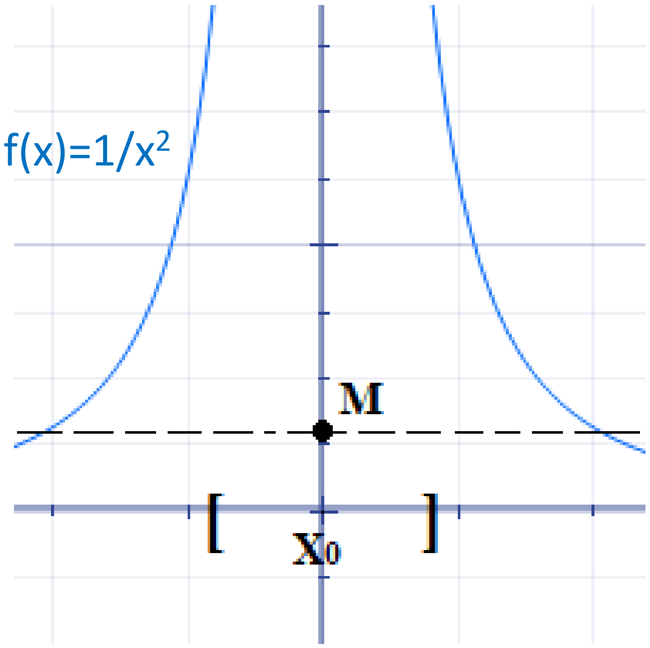
Άπειρα όρια καθώς $x \to x_0$

Ορισμός: Έστω f ορισμένη στο ανοικτό διάστημα που περιέχει το x_0 χωρίς το x_0, δηλ. ΠΟ(f) = $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε:

(i) $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0\ \exists$ ένα $\delta > 0$: $\forall x \in$ ΠΟ(f) με $|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$

(ii) $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0\ \exists$ ένα $\delta > 0$: $\forall x \in$ ΠΟ(f) με $<|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -M$

Παράδειγμα:



$f(x) = 1/x^2$ & $x_0 = 0$ όποιο x και να πάρω μέσα στο [...]: $f(x) > M$, άρα $\lim_{x \to 0} = +\infty$

Όμοια αν πάρω την $f(x) = -1/x^2$, όπου $\lim_{x \to 0} = -\infty$

Ιδιότητες

(i) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty \Rightarrow f(x)>0$ όταν το x είναι κοντά στο x_0

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)= -\infty \Rightarrow f(x)<0$ όταν το x είναι κοντά στο x_0

(ii) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} (-f(x))= -\infty$

(iii) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)}=0$

(iv) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0 \\ f(x)>0 \text{ κοντά στο } x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)}=+\infty$

Όμοια το όριο = $-\infty$ αν $f(x)<0$ κοντά στο x_0

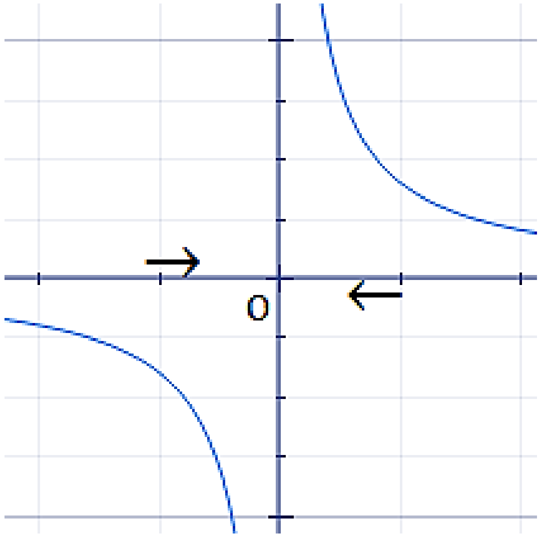
(v) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} |f(x)|=+\infty$

(vi) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[k]{f(x)}=+\infty$

Άσκηση :
Επαληθεύστε τις ιδιότητες με χρήση του ορισμού

Παραδείγματα

Παράδειγμα 1ο : $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=?$



$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty \\ \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty\end{array}\right\} \quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x} \text{ δεν υπάρχει}$$

Και γενικά ΔΕΝ υπάρχει το : $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{2\nu+1}},\ \nu\in\mathbb{N}$

Άσκηση: Να δ.ό. αντιθέτως υπάρχει το όριο για $1/x^2$ και γενικά για $1/x^{2\nu}$

Υπόδειξη: βλ. π.χ. ορισμού

Παράδειγμα 2ο :

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0}(-\frac{1}{x^2})=-\infty \\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty\end{array}\right\} \quad \text{τότε } \lim_{x\to 0}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to 0}(0)=0$$

Απροσδιόριστες μορφές

Οι επόμενες μορφές πράξεων δεν ορίζονται:

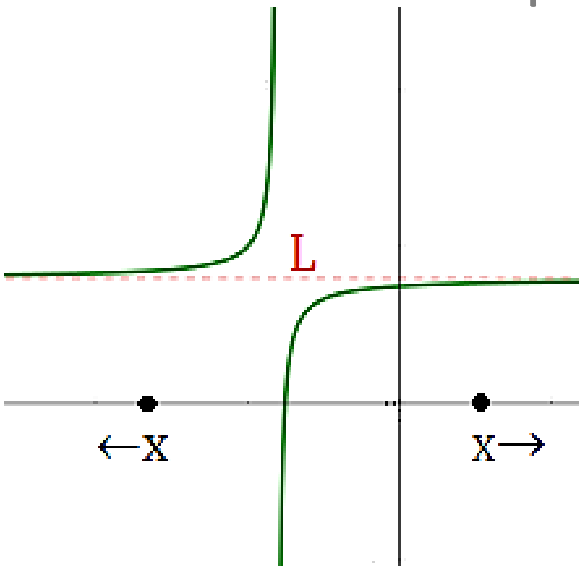
- $(+\infty) + (-\infty)$
- $0 \cdot (\pm\infty)$
- $0 / 0$
- 0^0
- $(\pm\infty)/(\pm\infty)$

Πεπερασμένα όρια όταν x→±∞

Ορισμός:

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{f(x)=L} \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\ \mathrm{N}>0\text{: } \forall x \text{ με } \underbrace{\mathrm{x>N}}_{\text{Το x απομακρύνεται κινούμενο στον xx'+}} \Rightarrow |\mathrm{f(x)-L}|<\varepsilon$

(ii) $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{f(x)=L} \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\ \mathrm{N}>0\text{: } \forall x \text{ με } \underbrace{\mathrm{x<-N}}_{\text{Το x απομακρύνεται κινούμενο στον xx'−}} \Rightarrow |\mathrm{f(x)-L}|<\varepsilon$



Άπειρα όρια όταν x → ±∞

Ορισμός:

(i) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall M>0\ \exists\ N>0: \forall x$ με $x>N \Rightarrow f(x)>M$

(ii) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall M>0\ \exists\ N>0: \forall x$ με $x<-N \Rightarrow f(x)>M$

(iii) $\lim_{x\to+\infty} f(x)= -\infty \Leftrightarrow \forall M>0\ \exists\ N>0: \forall x$ με $x>N \Rightarrow f(x)< -M$

(iv) $\lim_{x\to-\infty} f(x)= -\infty \Leftrightarrow \forall M>0\ \exists\ N>0: \forall x$ με $x<-N \Rightarrow f(x)< -M$

Παρατήρηση: Από τα προηγούμενα αντιλαμβανόμαστε ότι:

- για να βρούμε το όριο μιας f στο +∞, πρέπει το Π.Ο.(f) να είναι της μορφής (α, +∞) (με α αριθμός ή -∞).
- αντίστοιχα (-∞, β) για f στο -∞.

Κανόνες ορίων καθώς x→ ± ∞

Αν L, M, και k πραγματικοί αριθμοί &

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\pm\infty} g(x) = M, \quad \text{τότε:}$$

1. Όριο αθροίσματος/δαφοράς: $\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) \pm g(x)] = L \pm \mathrm{M}$

2. Όριο γινομένου: $\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot \mathrm{M}$

3. Όριο σταθερού πολλαπλάσιου: $\lim_{x\to\pm\infty} [\mathrm{k} \cdot f(x)] = \mathrm{k} \cdot L$

4. Όριο πηλίκου: $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}, \quad \mathrm{M} \neq 0$

5. Όριο δύναμης: $\lim_{x\to\pm\infty} [f(x)]^{\frac{r}{s}} = L^{\frac{r}{s}}, \quad \mathrm{r,s} \in \mathbb{Z},\ s \neq 0$

Παρατήρηση: Οι πράξεις μας είναι ίδιες όπως και στα πεπερασμένα όρια, π.χ.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\pi\sqrt{3}}{\mathrm{x}^2} = \lim_{x\to-\infty} (\pi\sqrt{3}) \cdot \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\mathrm{x}} \cdot \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\mathrm{x}} = \pi\sqrt{3} \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

Όρια ρητών συναρτήσεων με x → ±∞

Διαιρώ πάντα με τον μεγαλύτερο βαθμό του παρονομαστή

Παράδειγμα 1ο : (Βαθμός αριθμητή = Βαθμός παρονομαστή)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5+\frac{8}{x}-\frac{3}{x^2}}{3+\frac{2}{x^2}}=\frac{5+0-0}{3+0}=\frac{5}{3}$$

Παράδειγμα 2ο : (Βαθμός αριθμητή < Βαθμός παρονομαστή)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{11x+2}{2x^3-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{11}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{2-\frac{1}{x^3}}=\frac{0}{2}=0$$

Παράδειγμα 3ο : (Βαθμός αριθμητή > Βαθμός παρονομαστή)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-4x^3+7x}{2x^2-3x-10}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4x+\frac{7}{x}}{2-\frac{3}{x}-\frac{10}{x^2}}=\frac{+\infty+0}{2-0-0}=+\infty$$

Παραδείγματα με αντικατάσταση

Παράδειγμα 1ο : Να βρεθεί το $\lim_{x\to+\infty} \sin\frac{1}{x}$

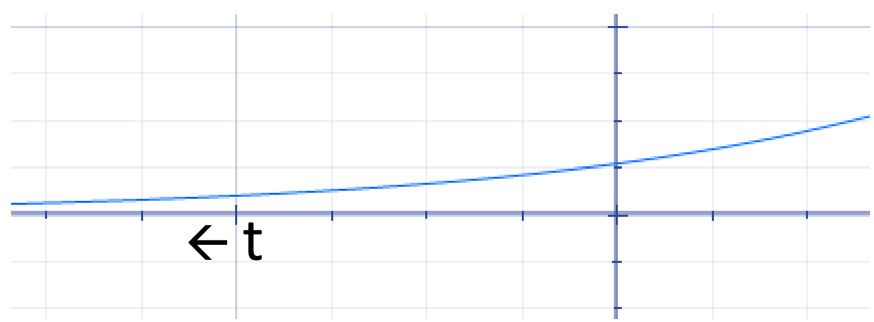
Έστω t=1/x, τότε όταν x→ +∞, το t → 0^+

$$\text{Άρα } \lim_{x\to+\infty} \sin\frac{1}{x} = \lim_{t\to0^+} \sin t = 0$$

Παράδειγμα 2ο : Να βρεθεί το $\lim_{x\to0^-} e^{\frac{1}{x}}$

Έστω t=1/x, τότε όταν x→ 0^-, το t → −∞

$$\text{Άρα } \lim_{x\to0^-} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to-\infty} e^t = 0$$



Όρια πολυωνυμικής συνάρτησης με $x \to \pm\infty$

- Αν $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\dots\alpha_1 x+\alpha_0$, $\alpha_\nu \neq 0$ τότε:

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} P(x)= \lim_{x\to\pm\infty} (\alpha_\nu x^\nu)}$$

π.χ. $\lim_{x\to-\infty} (4x^5-3x^3+6x^2+7)= \lim_{x\to-\infty} (4x^5) = -\infty$

- Και αν $Q(x)=\beta_\kappa x^\kappa+\beta_{\kappa-1}x^{\kappa-1}+\dots\beta_1 x+\beta_0$, $\beta_\kappa \neq 0$ τότε:

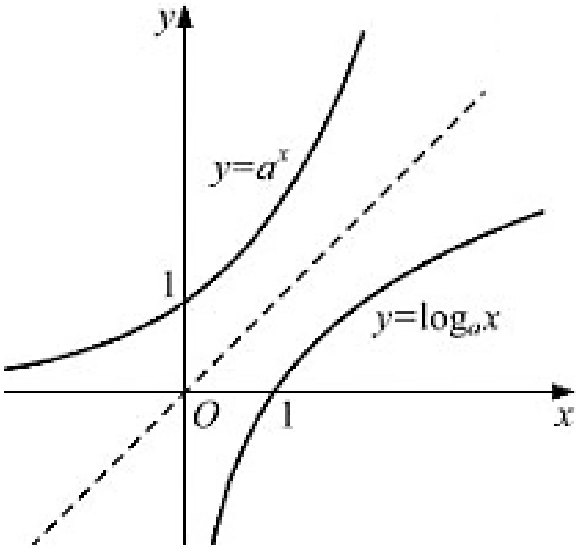
$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\kappa x^\kappa}\right)}$$

Συμπεριφορά της εκθετικής & της λογαριθμικής συνάρτησης με x → ±∞

- **Αν α > 1**

$$\lim_{x\to-\infty} \alpha^x = 0 \quad \& \quad \lim_{x\to+\infty} \alpha^x = +\infty$$

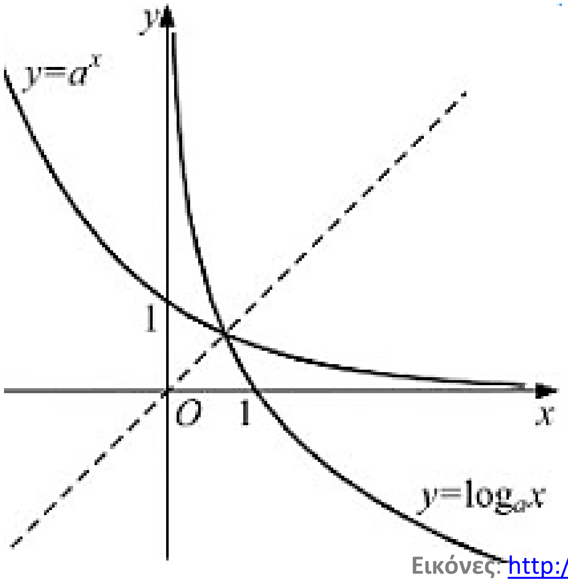
$$\lim_{x\to 0} \log_\alpha x = 0 \quad \& \quad \lim_{x\to+\infty} \log_\alpha x = +\infty$$



- **Αν 0 < α < 1**

$$\lim_{x\to-\infty} \alpha^x = +\infty \quad \& \quad \lim_{x\to+\infty} \alpha^x = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \log_\alpha x = +\infty \quad \& \quad \lim_{x\to+\infty} \log_\alpha x = -\infty$$

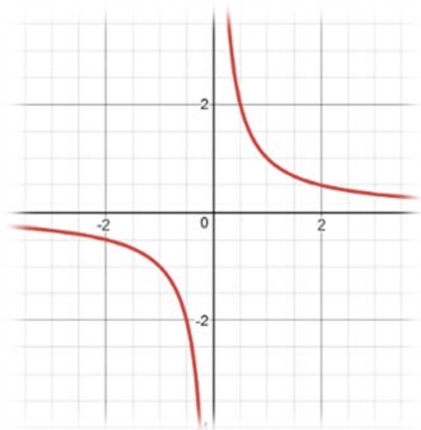


Εικόνες: http://eisatopon.blogspot.com/2013/11/blog-post_20.html

Άπειρα όρια: **Οριζόντιες και κατακόρυφες ασύμπτωτες**

Έστω η f(x)=1/x, τότε παρατηρούμε ότι:

- καθώς x→+∞, (1/x)→0 & $\lim_{x\to+\infty}(\frac{1}{x})=0$
- καθώς x→-∞, (1/x)→0 & $\lim_{x\to-\infty}(\frac{1}{x})=0$

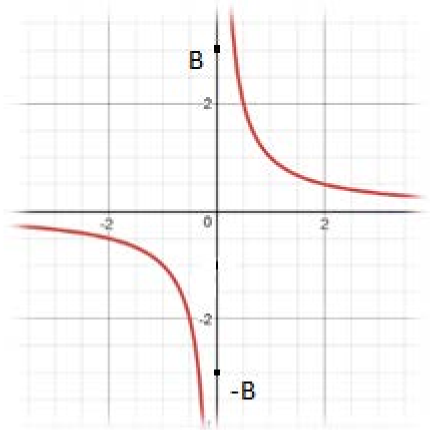


Λέμε ότι η γραφική παράσταση «τείνει ασυμπτωτικά» σε μια ευθεία όταν η απόσταση του γραφήματος της συνάρτησης και της ευθείας τείνει στο μηδέν. Η ευθεία λέγεται «ασύμπτωτη» της γραφικής παράστασης

Δηλ. στο π.χ. της f(x)=1/x, όποιο Β>0 και να διαλέξω πάνω στην ασύμπτωτη γγ', υπάρχουν άπειρα x τ.ώ. f(x)>B,

δηλ. $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(\frac{1}{x})=+\infty$

(Όμοια για f(x)<-B, δηλ. $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(\frac{1}{x})=-\infty$)



Ορισμός

Μία ευθεία y=b είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης y=f(x) αν ισχύει ότι:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \quad ή \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$

Μία ευθεία x=α είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης y=f(x) αν ισχύει ότι:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty \quad ή \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$$

Παράδειγμα

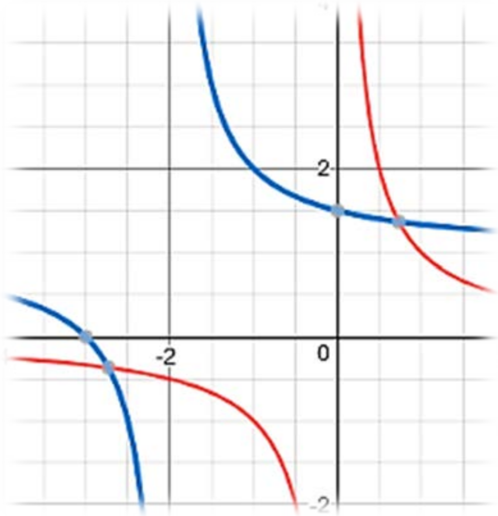
Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της $y = \dfrac{x+3}{x+2}$

δηλ. να βρούμε την συμπεριφορά της y καθώς

1. x→ ±∞
2. x→ - 2 (όπου μηδενίζεται ο παρονομαστής)

Επειδή: $y = \dfrac{x+3}{x+2} = 1 + \dfrac{1}{x+2}$

Έχω το γράφημα της 1/x μετατοπισμένο 1 μονάδα πάνω και 2 μονάδες αριστερά. Άρα οι ασύμπτωτες είναι οι y=1 και x=-2



Πλάγια ασύμπτωτη ρητών συναρτήσεων με βαθμός αριθμητής = βαθμός παρονομαστής +1

Βρίσκουμε την πλάγια ασύμπτωτη διαιρώντας κατά μέλη ώστε να εκφράσουμε την συνάρτηση με κάποιο <u>υπόλοιπο</u> τ.ώ. τείνει στο 0 όταν x→ ±∞

Παράδειγμα: Ποια η πλάγια ασύμπτωτη της $y = \dfrac{2x^2 - 3}{7x + 4}$

$$y = \frac{2x^2 - 3}{7x + 4} = \underbrace{(\frac{2}{7}x - \frac{8}{49})}_{\text{γραμμική συνάρτηση } g(x)} - \underbrace{\frac{115}{49(7x - 4)}}_{\text{υπόλοιπο}}$$

Καθώς x→ ±∞ το <u>υπόλοιπο</u> →0, δηλ. η g(x) είναι η πλάγια ασύμπτωτη της f(x) = y