ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Παραδείγματα $\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Νίκος Διακόπουλος, **Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης – Παραδείγματα**: http://diakopoulos.net/2015/11/10/παραγωγοσ-συνθετησ-συναρτησησ/

Παράγωγος της μορφής: $\left(g^{\alpha}(x)\right)' = \alpha g^{\alpha-1}(x) \cdot g'(x)$.

Παράδειγμα

Να υπολογισθεί η παράγωγος $\left((x^3-4x)^5\right)'$

Λύση

$$\left((x^3-4x)^5\right)' =$$

$$5 \cdot (x^3-4x)^{5-1} \cdot (x^3-4x)' =$$

$$5 \cdot (x^3-4x)^4 \cdot \left((x^3)' - (4x)'\right) =$$

$$5 \cdot (x^3-4x)^4 \cdot (3x^2-4).$$

Παράγωγος της μορφής: $\left(g^2(x)\right)' = 2g(x) \cdot g'(x)$.

Παράδειγμα

Να υπολογίσετε την παράγωγο $(\eta\mu^2 x)'$

Λύση

$$(\eta\mu^2 x)' =$$

$$\left((\eta\mu x)^2\right)' =$$

$$2\eta\mu x \cdot (\eta\mu x)' =$$

$$2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$$

Παράγωγος της μορφης: $\left(\eta\mu g(x)\right)' = \sigma\upsilon\nu g(x)\cdot g'(x).$

Παράδειγμα

Να υπολογίσετε την παράγωγο $\left(\eta\mu x^2\right)'$

Λύση

$\left(\eta\mu x^2\right)' = \sigma\upsilon\nu x^2\cdot(x^2)' = \sigma\upsilon\nu x^2\cdot 2x.$

Παράγωγος της μορφης: $\left(\sigma\upsilon\nu g(x)\right)' = -\eta\mu g(x)\cdot g'(x)$

Παράδειγμα

Να υπολογίστε την παράγωγο $\left(\sigma\upsilon\nu e^x\right)'$

Λύση

$\left(\sigma\upsilon\nu e^x\right)' = -\eta\mu e^x\cdot(e^x)' = -\eta\mu e^x\cdot e^x.$

Παράγωγος της μορφής

$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{1}{g^2(x)}\cdot g'(x)$ με $g(x)\neq 0.$

Παράδειγμα

Να βρεθεί η παράγωγος $\left(\frac{1}{2x+1}\right)'$

Λύση

για $x\neq -\frac{1}{2}$ έχουμε

$$\left(\frac{1}{2x+1}\right)' =$$

$$-\frac{1}{(2x+1)^2}\cdot(2x+1)' =$$

$$-\frac{1}{(2x+1)^2}\cdot(2\cdot 1+0) =$$

$$-\frac{1}{(2x+1)^2}\cdot 2 =$$

$$-\frac{2}{(2x+1)^2}$$

Παράγωγος της μορφής

$\left(\sqrt{g(x)}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x)$ με $g(x) > 0$

Παράδειγμα

Να υπολογίσετε την παράγωγο $\left(\sqrt{e^x}\right)'$

Λύση

$\left(\sqrt{e^x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{e^x}} \cdot (e^x)' = \frac{1}{2\sqrt{e^x}} \cdot e^x.$

Παράγωγος της μορφής $\left(e^{g(x)}\right)' = e^{g(x)} \cdot g'(x)$

Παράδειγμα

Να βρεθεί η παράγωγος $\left(e^{3x}\right)'$

Λύση

$\left(e^{3x}\right)' = e^{3x} \cdot (3x)' = e^{3x} \cdot 3 = 3e^{3x}.$

Παράδειγμα

Να βρεθεί η παράγωγος $\left(e^{-x}\right)'$

Λύση

$\left(e^{-x}\right)' = e^{-x} \cdot (-x)' = -e^{-x}.$

Παράγωγος της μορφής $\left(\ln g(x)\right)' = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x)$ με $g(x) > 0$

Παράδειγμα

Να βρεθεί η παράγωγος $\left(\ln(x-5)\right)'$

Λύση

Για $x > 5$ έχουμε

$\left(\ln(x-5)\right)' = \frac{1}{x-5} \cdot (x-5)' = \frac{1}{x-5} \cdot 1 = \frac{1}{x-5}.$

Παράγωγος της μορφής $\left(\epsilon\phi g(x)\right)' = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 g(x)} \cdot g'(x)$ με

$\sigma\upsilon\nu g(x) \neq 0$

Παράδειγμα να βρεθεί η παράγωγος $\left(\epsilon\phi(x^2 + e^x)\right)'$

Λύση

για $\sigma\upsilon\nu(x^2 + e^x) \neq 0$ έχουμε

$$\left(\epsilon\phi(x^2 + e^x)\right)' =$$

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2(x^2 + e^x)} \cdot (x^2 + e^x)' =$$

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2(x^2 + e^x)} \cdot \left((x^2)' + (e^x)'\right) =$$

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2(x^2 + e^x)} \cdot (2x + e^x)$$

Παράγωγος της μορφής $\left(\sigma\phi g(x)\right)' = -\dfrac{1}{\eta\mu^2 g(x)} \cdot g'(x)$.

με $\eta\mu g(x) \neq 0$

Παράδειγμα

Να βρεθεί η παράγωγος $\left(\sigma\phi x^4\right)'$

Λύση

για $\eta\mu x^4 \neq 0$, έχουμε

$$\left(\sigma\phi x^4\right)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x^4} \cdot (x^4)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x^4} \cdot 4x^3$$

Παράγωγος της μορφής

$\left(\alpha^{g(x)}\right)' = \alpha^{g(x)} \cdot \ln\alpha \cdot g'(x)$ με $\alpha > 0$

Παράδειγμα

Να υπολογισθεί η παράγωγος $\left(4^{5x+1}\right)'$

Λύση

$$\left(4^{5x+1}\right)' = 4^{5x+1} \cdot \ln 4 \cdot (5x+1)' = 4^{5x+1} \cdot \ln 4 \cdot 5x.$$

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕ ΚΛΑΔΟΥΣ

Νίκος Διακόπουλος, **Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης – Παραδείγματα**: http://diakopoulos.net/2015/11/14/παραγωγοσ-συναρτησησ-με-κλαδουσ/

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x, & x \le 1 \\ 2x^2, & x > 1 \end{cases}$$

Να βρείτε την $f'(x)$

Λύση

Για $x < 1$ είναι $f(x) = x^3 + x$, οπότε:

$$f'(x) = (x^3 + x)' = 3x^2 + 1$$

Για $x > 1$ είναι $f(x) = 2x^2$, οπότε:

$$f'(x) = (2x^2)' = 4x$$

Εξετάζουμε αν η f συνεχής στο $x_0 = 1$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x^3 + x) = 1 + 1 = 2$$

Επίσης

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 2x^2 = 2$$

Απο κριτήριο πλευρικων ορίων $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$

Επίσης έχουμε:

$$f(1) = 2$$

Επομένως η f είναι συνεχής στο 1.

Εξετάζουμε αν η f παραγωγίζεται στο στο $x_0 = 1$

Θα πρεπει το $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ να υπάρχει και να είναι πραγματικός αριθμός.

Έχουμε

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} =$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^3+x-2}{x-1} =$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^3-1+x-1}{x-1} =$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^3-1^3+x-1}{x-1} =$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x^2+x+1)+x-1}{x-1} =$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x^2+x+1)+(x-1)}{x-1} =$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)[(x^2+x+1)+1]}{x-1} =$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x^2+x+1+1)}{x-1} =$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x^2+x+2)}{x-1} =$$

$$\lim_{x\to 1^-} (x^2+x+2) = 4$$

Επισης

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} =$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2x^2-2}{x-1} =$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2(x-1)(x+1)}{x-1} =$$

$$\lim_{x\to 1^+} 2(x+1) = 4$$

Άρα η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 1 με $f'(1) = 4$.
Επομένως είναι:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2+1, & x \le 1 \\ 4x, & x > 1 \end{cases}$$

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $(f(x))^{g(x)}$

Νίκος Διακόπουλος, **Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης – Παραδείγματα**: http://diakopoulos.net/2015/11/16/latex page-παραγωγιση-συναρτησεων-τησ-μορφησ-f/

Για κάθε πραγματικό αριθμό $\alpha > 0$ ισχύει ότι: $\alpha = e^{ln\alpha}$
Μια συνάρτηση της μορφής $f(x) = (g(x))^{h(x)}$ ορίζεται όταν:
$g(x) > 0$ και $h(x) \in \mathbb{R}$
Για να βρούμε την $f'(x)$, γράφουμε τον τύπο της $f(x)$ ως εξής:

$$f(x) = (g(x))^{h(x)}$$

$$= e^{ln[g(x)]^{h(x)}}$$

$$= e^{h(x)lng(x)}$$

Οπότε έχουμε $f'(x) = \left(e^{h(x)lng(x)}\right)' = e^{h(x)lng(x)} \cdot (h(x)lng(x))'$

Παράδειγμα
Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = (x^2 + x)^x$
Λύση
Η συνάρτηση

$$f(x) = (x^2 + x)^x$$

ορίζεται όταν:

$$x^2 + x > 0 \Leftrightarrow$$
$$x(x+1) > 0 \Leftrightarrow$$
$$x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$$

Άρα η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού:

Για κάθε $x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ είναι:

$$f(x) = (x^2 + x)^x = e^{ln(x^2+x)^x} = e^{xln(x^2+x)}$$

Οπότε έχουμε:

$$f'(x) = (e^{x\ln(x^2+x)})'$$

$$= e^{x\ln(x^2+x)}(x\ln(x^2+x))'$$

$$= e^{x\ln(x^2+x)}[(x)'\cdot\ln(x^2+x) + x\cdot\big(\ln(x^2+x)\big)']$$

$$= e^{x\ln(x^2+x)}\Big(1\cdot\ln(x^2+x) + x\cdot\frac{1}{x^2+x}\cdot(x^2+x)'\Big)$$

$$= e^{x\ln(x^2+x)}(\ln(x^2+x) + x\cdot\frac{1}{x^2+x}\cdot(x^2+x)')$$

$$= e^{x\ln(x^2+x)}\Big(\ln(x^2+x) + x\cdot\frac{1}{x(x+1)}\cdot(2x+1)\Big)$$

$$= e^{x\ln(x^2+x)}\Big(\ln(x^2+x) + \frac{1}{x+1}\cdot(2x+1)\Big)$$

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΣΕ ΕΝΑ ΣΗΜΕΙΟ

Νίκος Διακόπουλος, **Εφαπτόμενη – Παραδείγματα**: http://diakopoulos.net/2015/11/21/εφαπτομενη-σε-ενα-σημειο/

Παράδειγμα.1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 5x + 9$ Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(2, f(2))$.

Λύση

Έστω $(\epsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$ η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A\big(x_0, f(x_0)\big) \in C_f$

Συνεπώς για να βρούμε την εφαπτομένη αρκεί να υπολογίσουμε τα $x_0, f(x_0)$ και $f'(x_0)$

Απο υπόθεση $x_0 = 2$ οπότε

$$f(2) = 2^2 - 5\cdot 2 + 9 \Leftrightarrow f(2) = 3$$

Επίσης για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι: $f'(x) = 2x - 5$

Άρα είναι: $f'(2) - 2\cdot 2 - 5 = -1$

Επομένως η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο της $A(2, f(2))$ έχει εξίσωση:

$$\begin{aligned} &y - f(2) = f'(2)(x-2) \Leftrightarrow \\ &y - 3 = -1(x-2) \Leftrightarrow y = -x + 5 \end{aligned}$$

Παράδειγμα.2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 2x$. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης C_f, που διέρχονται απο το σημείο $M(1, 2)$.

Λύση

Έστω $(\epsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$ η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A\big(x_0, f(x_0)\big) \in C_f$

Συνεπώς για να βρούμε την εφαπτομένη αρκεί να υπολογίσουμε τα $x_0, f(x_0)$ και $f'(x_0)$

Απο την εκφώνηση, έχουμε ότι το σημειο $M(1,2) \notin C_f$, αφού για $x = 1$, το $f(1) = -1^2 + 2\cdot 1 = 1 \neq 2$.

Οπότε το σημείο $M(1,2)$ ανήκει μόνο στην εφαπτομένη (ϵ).

Συνεπώς με $f(x_0) = -x_0^2 + 2x_0 \ (1)$ και $f'(x_0) = -2x_0 + 2 \ (2)$ έχουμε:

$$M(1,2) \in (\epsilon) : y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \xRightarrow[y=2]{x=1}$$

$$2 - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (1 - x_0) \xRightarrow[(2)]{(1)}$$

$$2 + x_0^2 - 2x_0 = (-2x_0 + 2) \cdot (1 - x_0) \Rightarrow$$

$$2 + x_0^2 - 2x_0 = -2x_0 + 2x_0^2 + 2 - 2x_0 \Rightarrow$$

$$2 + x_0^2 - 2x_0 + 2x_0 - 2x_0^2 - 2 + 2x_0 = 0 \Rightarrow$$

$$-x_0^2 + 2x_0 = 0 \Rightarrow$$

$$x_0 \cdot (x_0 - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0, \\ x_0 = 2 \end{cases}$$

Οπότε για

$$x_0 = 0 \text{ έχουμε} \begin{cases} (1) \Rightarrow f(0) = 0 \\ (2) \Rightarrow f'(0) = 2 \end{cases}$$

και εξίσωση εφαπτομένης $(\epsilon_1) : y = 2x$
και για

$$x_0 = 2 \text{ έχουμε} \begin{cases} (1) \Rightarrow f(2) = 0 \\ (2) \Rightarrow f'(2) = -2 \end{cases}$$

και εξίσωση εφαπτομένης $(\epsilon_1) : y = -2x + 4$.