Παράγωγος αντίστροφης

Διαφορικός Λογισμός
μιας μεταβλητής Ι

Θεώρημα παραγώγου της f^{-1}

Έστω $f: (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ αμφιμονοσήμαντη (δηλ. 1-1)

$$\left.\begin{array}{l}\text{Αν } f \text{ παραγωγίσιμη στο } (\alpha, \beta) \\ \text{\& αν } f' \neq 0 \text{ στο } (\alpha, \beta)\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}(\alpha)\ \exists\ \eta\ f^{-1}(y) \\ (\beta)\ (f^{-1})'(y) = 1/f'(x)\end{array}\right.$$

$$\text{δηλ. } f'(x) = \frac{dy}{dx} \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{f'(x)} = \frac{dx}{dy} = (f^{-1})'(y)}$$

Παραδείγματα

Παράδειγμα: Έστω η $f(x) = x^2+\ln x+4$. Να βρείτε την $(f^{-1})'(x)$ και στην συνέχεια την $(f^{-1})'(5)$

Παράδειγμα: Έστω η $f(x) = e^x+x^2$. Να βρείτε την $(f^{-1})'(x)$ και στην συνέχεια την $(f^{-1})'(1)$

Διαφορικό

Έστω f(x) διαφορίσιμη (δηλ. υπάρχει το $dy/dx=f'(x)$)

Το διαφορικό είναι η έκφραση: $\boxed{dy = f'(x) \cdot dx}$

δηλ. dx ανεξάρτητη μεταβλητή
& dy εξαρτημένη (από x & dx)

π.χ.: $y = x^5+37x \Rightarrow dy = (5x^4+37)dx$

$y=\sin 3x \Rightarrow dy = (3\cos 3x)dx$

Το διαφορικό συμβολίζεται και με df

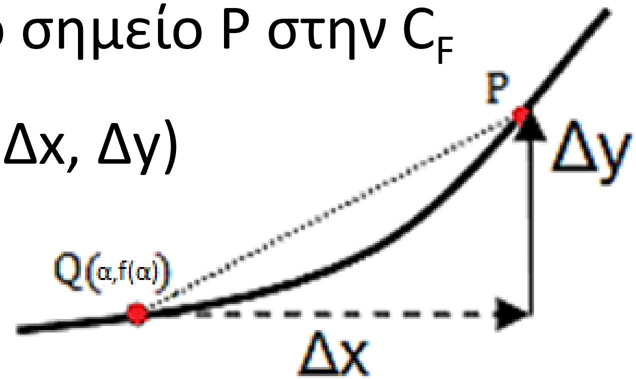
π.χ.:
$$d\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{(x+1)\cdot dx - x\cdot d(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{dx}{(x+1)^2}$$

Από το παράδειγμα γίνεται κατανοητό ότι στο διαφορικό χρησιμοποιούμε όλους τους κανόνες παραγώγισης

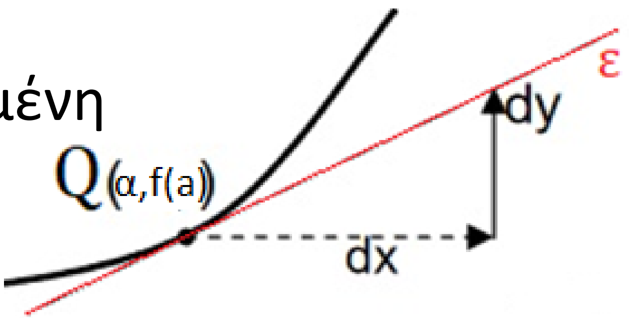
Μεταβολή & Διαφορικό

1. Οι μεταβολές ορίζονται ως οι μετατοπίσεις πάνω στην καμπύλη, π.χ το σημείο Q κινείται προς το σημείο P στην C_F

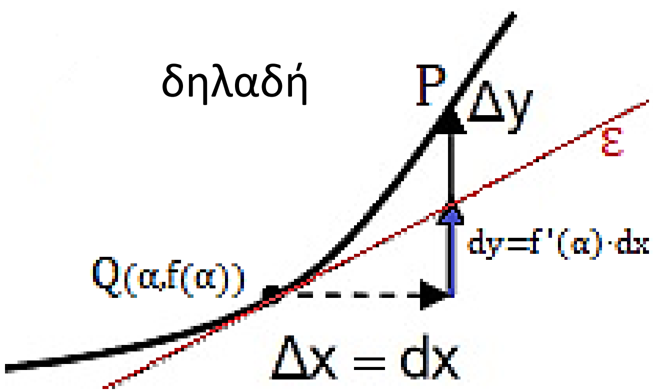
   Οι μετατοπίσεις αυτές συμβολίζονται με (Δx, Δy) και ικανοποιούν την $\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)$



2. Αντίστοιχα, τα διαφορικά ορίζονται ως οι μετακινήσεις του σημείου Q στην εφαπτομένη και ικανοποιούν την $dy = f'(x)\cdot dx$

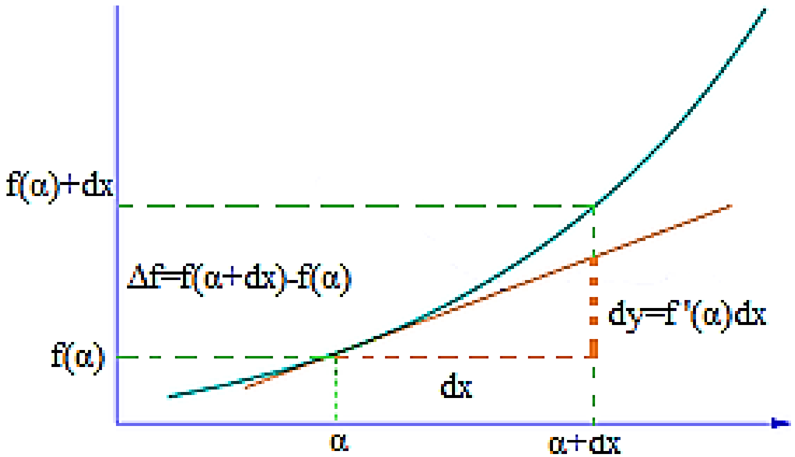


δηλαδή



Εύρεση μεταβολών με διαφορικό

Έστω ξέρω ότι στο σημείο α η f παίρνει την τιμή f(α). Θέλω να ξέρω πόσο θα αλλάξει η f(α) αν μετακινήσω το α στην θέση α+dx



Όταν λοιπόν το α → α+dx, τότε μετακινείται και η f κατά Δf:

$$\Delta f = f(\alpha+dx)-f(\alpha)$$

και η ‘μεταβολή’ της κλίσης της εφαπτομένης είναι πια:

$$\boxed{dy = f'(\alpha) \cdot dx}$$

(δηλ. το διαφορικό αποκτά γεωμετρική ερμηνεία)

Παράδειγμα

Έστω κύκλος με την ακτίνα του r να αυξάνεται από r=10 m σε r=10,1 m.

1. Πόσο μεταβλήθηκε η επιφάνειά του;

2. Ποια είναι η πραγματική μεταβολή;

Πεπλεγμένες συναρτήσεις με το ολικό διαφορικό

Έστω η συνάρτηση f(x,y)=0 σε πεπλεγμένη μορφή. Τότε το ολικό διαφορικό της είναι:

$$f_x(x,y)\cdot dx + f_y(x,y)\cdot dy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}$$

Ασκήσεις:

1. Βρείτε την y’ αν $xy^3-3x^2=xy+5$

2. Βρείτε την y’ αν $3x^5+8y^2-10=0$

Παράδειγμα

(εφαπτομένη & κάθετη στο φύλλο του Καρτέσιου

Έστω η $F(x, y)=0$: $x^3+y^3-9xy=0$

(α) Να δ.ό. το σημείο (2, 4) ανήκει στην καμπύλη C_F

(β) να βρείτε την εφαπτομένη και την κάθετη στο σημείο (2,4)

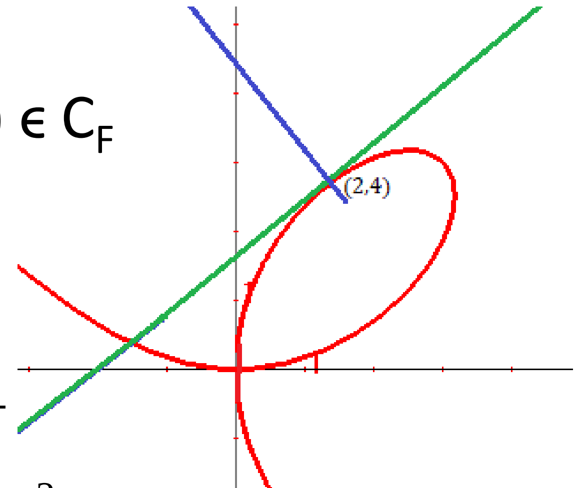
Προσοχή: το y είναι της μορφής y=f(x)

Λύση:

(α) $x^3+y^3-9xy = 2^3+4^3-9\cdot 2\cdot 4=72-72=0 \Rightarrow (2, 4) \in C_F$

(β) $x^3+y^3-9xy=0 \Rightarrow \frac{d}{dx}x^3+\frac{d}{dx}y^3-9\frac{d}{dx}xy=0 \Rightarrow$

$$3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}-9\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)=0 \Rightarrow \cdots \frac{dy}{dx}=\frac{3y-x^2}{y^2-3x}$$



Η παράγωγος στο (2, 4) είναι: $\frac{dy}{dx}\Big|_{(2,4)}=\frac{3y-x^2}{y^2-3x}\Big|_{(2,4)}=\frac{4}{5}$

- η εφαπτομένη στο (2, 4) είναι: $y-4=4/5\cdot(x-2)$
- & η κάθετη στο (2, 4) είναι: $y-4=(-5/4)\cdot(x-2)$

Άσκηση

Να βρείτε την y’ στην f(x,y) τ.ώ. $y^3=4x^2-2xy^5$

Μην ξεχνάτε:

- x ανεξάρτητη μεταβλητή
- y εξαρτημένη μεταβλητή (από το x)

Παράδειγμα εύρεσης 2ης παραγώγου πεπλεγμένης συνάρτησης

Προσοχή
Για το y’’ μόνο με τον 1ο τρόπο όπου θεωρούμε το y=y(x), δηλ. εξαρτημένη μεταβλητή, και όχι με το ολικό διαφορικό

Να βρείτε την $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ αν $2x^3\text{-}3y^2=8$

Λύση:

$$\frac{d}{dx}(2x^3\text{-}3y^2)=\frac{d}{dx}8 \Rightarrow 6x^2\text{-}6yy'=0 \Rightarrow y'=\frac{x^2}{y},\ y\neq 0\ (\mathrm{I})$$

$$\text{Από (I): } y''=\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{y}\right)=\frac{2xy\text{-}x^2y'}{y^2}=\frac{2x}{y^2}-\frac{x^4}{y^3},\ y\neq 0$$

από τον κανόνα παραγώγισης πηλίκου

μετά από την αντικατάσταση του y’ από την (I)