Ασκηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2+\beta x+\gamma, & -2\le x<0 \\ \alpha x^2+3x+3, & 0\le x\le 2 \end{cases}$.

Βρείτε τα $\alpha,\beta,\gamma\in R$ ώστε να εφαρμόζεται για την f του Θ. Rolle στο διάστημα $[-2,2]$.

Λύση

Η f είναι συνεχής στο $[-2,0)\cup(0,2]$ και παραγωγίσιμη στο $[-2,0)\cup(0,2]$.

Για να ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle η f πρέπει να είναι συνεχής και στο 0

Δηλαδή $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)\Leftrightarrow \gamma=3$ και παραγωγίσιμη και στο $x_0=0$ δηλαδή

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}.$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2+\beta x+\gamma-3}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2+\beta x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x(x+\beta)}{x}=\beta$

και $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\alpha x^2+3x+3-3}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x(\alpha x+3)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}(\gamma x+3)=3$ οπότε $\beta=3$.

Ακόμη $f(-2)=(-2)^2+\beta(-2)+\gamma=4-2\beta+\gamma=4-2\cdot 3+3=4-6+3=1$ και

$f(2)=\alpha\cdot 2^2+3\cdot 2+3=4\alpha+6+3=4\alpha+9$

Πρέπει $f(-2)=f(2)\Leftrightarrow 1=4\alpha+9\Leftrightarrow \alpha=-2$. Άρα $(\alpha,\beta,\gamma)=(-2,3,1)$.

Ασκηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+4x^2-5x+2$, $x\in R$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ ώστε $f'(\xi)=0$. Να βρείτε το ξ.

Λύση

Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ ως πολυωνυμική. Επίσης είναι $f(0)=2$ και $f(1)=2$ από το Θ. Rolle υπάρχει $\xi\in(0,1)$ με $f'(\xi)=0$.

Έχουμε $f'(x)=3x^2+8x-5$, $x\in R$. Άρα:

$$f'(\xi)=0\Leftrightarrow 3\xi^2+8\xi-5=0\Leftrightarrow \xi_{1,2}=\frac{-8\pm\sqrt{124}}{6}\Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1=\dfrac{-8-\sqrt{124}}{6}<0, & (\text{απορρίπτεται}) \\ \xi_2=\dfrac{-8+\sqrt{124}}{6}, & (\text{δεκτή}) \end{cases}$$

Ασκηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^4+\frac{16}{3}x^3-10x^2+8x+2003$, $x\in R$.

Δείξτε ότι $\xi\in(0,1)$ **με** $f''(\xi)=0$.

Λύση

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R ως πολυωνυμική με $f'(x)=4x^3+16x^2-20x+8$.
Για την συνάρτηση f' ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle στο $[0,1]$, διότι η f' είναι παραγωγίσιμη στο R άρα και στο $[0,1]$ και $f'(0)=8$ και $f'(1)=8$. Άρα υπάρχει $\xi\in(0,1)$ με $f''(\xi)=0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να εξετάσετε αν εφαρμόζεται το Θεώρημα του Rolle στο διάστημα Δ για την συνάρτηση f όταν:

(α) $f(x)=\left\{\begin{array}{ll} x^2+x^3\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2x} & x<0 \\ x^3+\eta\mu^2\pi x & x\geq 0\end{array}\right\}$ **και** $\Delta=[-1,1]$

(β) $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}$ **και** $\Delta=[-2,2]$.

Λύση

(α) Η συνάρτηση: $f(x)=\left\{\begin{array}{ll} x^2+x^3\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2x} & x<0 \\ x^3+\eta\mu^2\pi x & x\geq 0\end{array}\right\}$ έχει πεδίο ορισμού το

$A=\mathbb{R}$.

- Η f είναι συνεχής στο $[-1,0)$ και στο $(0,1]$ και θα εξετάσουμε αν η f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

➢ $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^3+\eta\mu\pi x)=0$

➢ $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x^2+x^3\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2\chi}\right)=0+0=0$

➢ $f(0)=0$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$ έπεται ότι η f είναι συνεχής στο $x_0=0$. Επομένως η f είναι συνεχής στο $[-1,1]$.

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,0)$ και στο $(0,1)$ και θα εξετάσουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

  - $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^3+\eta\mu^2\pi x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\left(x^3+\eta\mu^2\pi x\right)'}{x'}=$
    $=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(3x^2+2\pi\cdot\eta\mu\pi x\cdot\sigma\upsilon\nu\pi x\right)=0$

  - $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2+x^3\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{2x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x+x^2\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{2x}\right)=0+0=0$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ έπεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$. Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$.

- Είναι $f(-1)=1$ και $f(1)=1$, δηλαδή $f(-1)=f(1)$.

Επομένως εφαρμόζεται το Θεώρημα του Rolle για την συνάρτηση f στο διάστημα $[-1,1]$.

(β) Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}$ έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$. Θα εξετάσουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

- $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{\sqrt[3]{(x-1)^3}}=\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt[3]{\dfrac{1}{x-1}}=+\infty$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

Επομένως, δεν εφαρμόζεται το Θεώρημα του Rolle για την συνάρτηση f στο διάστημα $[-2,2]$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x)=\begin{Bmatrix} x^2+ax+\beta & x\le 0 \\ \gamma x^2+4x+4 & x>0 \end{Bmatrix}$$

Να βρείτε τα $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ ώστε να εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την συνάρτηση f στο διάστημα $[-1,1]$.

Λύση

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$. Για να εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle στην f στο διάστημα $[-1,1]$ πρέπει η f να είναι συνεχής στο $[-1,1]$, παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ και να ισχύει $f(-1)=f(1)$.

- $f(1)=f(-1)\Leftrightarrow \gamma+4+4=(-1)^2-\alpha+\beta\Leftrightarrow \gamma+8=1-\alpha+\beta\Leftrightarrow$ $\alpha-\beta+\gamma=-7$ **(1)**
- Η f είναι συνεχής στο $[-1,0)$ και στο $(0,1]$ και για να είναι συνεχής στο $[-1,1]$ πρέπει η f να είναι συνεχής στο $x_0=0$. Δηλαδή πρέπει να ισχύει:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0) \quad \textbf{(A)}$$

Είναι:

- $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f\left(\gamma x^2+4x+4\right)=4$
- $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f\left(x^2+\alpha x+\beta\right)=\beta$
- $f(0)=\beta$

Επομένως η **(A)** γίνεται $4=\beta$ **(2)**.

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,0)$ και στο $(0,1)$ και για να είναι η f παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ πρέπει να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$. Δηλαδή πρέπει να ισχύει:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\in\mathbb{R} \quad \textbf{(B)}$$

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\gamma x^2+4x+4-\beta}{x}\overset{(2)}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\gamma x^2+4x+4}{x}=$

  $=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x(\gamma x+4)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}(\gamma x+4)=4$
- $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2+\alpha x+\beta-\beta}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x(x+\alpha)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+\alpha)=\alpha$

  Επομένως η **(Β)** γίνεται $\alpha=4$ **(3)**.

- Από (1),(2) και (3) έχουμε:

$$\left\{\begin{matrix}\alpha-\beta+\gamma=-7\\ \beta=4\\ \alpha=4\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\alpha=4\\ \beta=4\\ \gamma=-7\end{matrix}\right\}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, $\alpha>0$ και παραγωγίσιμη στο (α,β). Αν $\alpha f(\beta)=\beta f(\alpha)$ να δείξετε ότι:

(α) Υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\lambda f(\xi)$.

(β) Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(\xi,f(\xi))$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Λύση

(α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ η οποία ορίζεται στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

Για τη συνάρτηση h έχουμε:

- Η h είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.
- Η h είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) με $h'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$
- $h(\alpha)=\dfrac{f(\alpha)}{\alpha}$ και $h(\beta)=\dfrac{f(\beta)}{\beta}$ δηλαδή $h(\alpha)=h(\beta)$ (επειδή $\alpha f(\beta)=\beta f(\alpha)\Leftrightarrow\dfrac{f(\alpha)}{\alpha}=\dfrac{f(\beta)}{\beta}$).

Από το Θεώρημα του Rolle έπεται ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \frac{\xi f'(\xi) - f(\xi)}{\xi^2} = 0 \Leftrightarrow \xi f'(\xi) - f(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi f'(\xi) = f(\xi)$$

(β) Επειδή η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο ξ έπεται ότι ορίζεται η εφαπτομένη στη C_f στο σημείο $A(\xi, f(\xi))$ η οποία έχει εξίσωση:

$$y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) \quad (1).$$

Για το $x = 0$ και $y = 0$ η (1) γίνεται $-f(\xi) = -f'(\xi)\xi \Rightarrow \xi f'(\xi) = f(\xi)$ που ισχύει. Άρα η εφαπτομένη της C_f στο σημείο Α διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Παράδειγμα

Να μελετήσετε την μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = e^x + x^3$.

Λύση

Είναι $D_f = \mathbb{R}$, στο οποίο η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως άθροισμα συνεχών και παραγωγίσιμων, αντίστοιχα, συναρτήσεων.

Είναι $f'(x) = e^x + 3x^2 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και, άρα, δεν έχει ακρότατα.

Να μελετήσετε την συνάρτηση $f(x) = e^{-x^3}$ ως προς την μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατά της.

Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, στο οποίο είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως σύνθεση συνεχών και παραγωγίσιμων, αντίστοιχα, συναρτήσεων, με

$$f'(x) = e^{-x^3} \cdot (-x^3)' \Rightarrow f'(x) = -3x^2 e^{-x^3} < 0, \text{ για κάθε } x \neq 0.$$

Επειδή, όμως, η f είναι συνεχής στο 0, έχω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, συνεπώς δεν έχει ακρότατα.

Να βρείτε την μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = 3x^2$, $x \in [-3, 2]$.

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $A = [-3, 2]$ ως πολυωνυμική.

Είναι $f'(x) = 6x$, οπότε από την ανίσωση $f'(x) > 0$ εύκολα προκύπτει $x > 0$.

Από τον ακόλουθο πίνακα

x	-3	0	2
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	↘		↗

έχω ότι η f είναι:

- γνησίως φθίνουσα στο $[-3, 0]$.
- γνησίως αύξουσα στο $[0, 2]$.

Επειδή η f ορίζεται σε κλειστό διάστημα, έχει ελάχιστο και μέγιστο.

Από τις τιμές $f(-3)$, $f(0)$, $f(2)$ η μικρότερη θα είναι το ελάχιστο και η μεγαλύτερη το μέγιστο της f.

- $f(-3) = 3(-3)^2 \Rightarrow f(-3) = 27$.
- $f(0) = 3 \cdot 0^2 \Rightarrow f(0) = 0$, που, προφανώς, είναι το ελάχιστο, όπως προκύπτει από τον παραπάνω πίνακα.
- $f(2) = 3 \cdot 2^2 \Rightarrow f(2) = 12$.

Άρα:

- για $x = 0$ η f έχει ελάχιστο, το $f(0) = 0$.
- για $x = -3$ η f έχει μέγιστο, το $f(-3) = 27$.

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + 3x^2 + (\alpha + 2)x - 5$. Για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$;

Για να είναι η f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, αρκεί να είναι $f'(x) \leq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Είναι $f'(x) = 3\alpha x^2 + 6x + \alpha + 2$, οπότε από την παραπάνω ανίσωση έχω ότι πρέπει να ισχύουν

$$3\alpha < 0 \Rightarrow \boxed{\alpha < 0} \quad \text{και} \quad \Delta \leq 0, \text{ όπου } \Delta \text{ η διακρίνουσα του τριωνύμου.}$$

Από την σχέση $\Delta \leq 0$ έχω

$$6^2 - 4 \cdot 3\alpha \cdot (\alpha + 2) \leq 0 \Rightarrow 36 - 12\alpha(\alpha + 2) \leq 0 \Rightarrow 3 - \alpha(\alpha + 2) \leq 0 \Rightarrow 3 - \alpha^2 - 2\alpha \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + 2\alpha - 3 \geq 0 \Rightarrow \alpha \leq -3 \text{ ή } \alpha \geq 1 \overset{\alpha<0}{\Rightarrow} \alpha \leq -3.$$

Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 + 3\alpha x^2 + 24x - 5$ να είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Για να είναι η f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, αρκεί να ισχύει $f'(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Είναι

$$f'(x) = 6x^2 + 6\alpha x + 24 \Rightarrow f'(x) = 6(x^2 + \alpha x + 4).$$

Έτσι, από την ανίσωση $f'(x) \geq 0$ έχω $x^2 + \alpha x + 4 \geq 0$, που για να ισχύει, πρέπει η διακρίνουσα Δ του τριωνύμου να είναι $\Delta \leq 0$.

Έτσι, από την σχέση $\Delta \leq 0$ έχω

$$\alpha^4 - 4 \cdot 1 \cdot 4 \leq 0 \Rightarrow \alpha^2 - 16 \leq 0 \Rightarrow \alpha \in [-4, 4].$$

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 \cdot \dfrac{x-1}{x+1} - \ell n x,\ x > 0.$

Να βρείτε την μονοτονία της.

Για να ορίζεται η f, πρέπει να είναι

$$\begin{Bmatrix} x+1 \neq 0 \ \text{ και} \\ x > 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x \neq -1 \ \text{ και} \\ x > 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow x > 0.$$

Άρα είναι $D_f = (0, +\infty)$, στο οποίο η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών και παραγωγίσιμων, αντίστοιχα, συναρτήσεων, με

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{(x-1)' \cdot (x+1) - (x-1) \cdot (x+1)'}{(x+1)^2} - \frac{1}{x} = 2 \cdot \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} - \frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2 \cdot \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x} = 2 \cdot \frac{2}{(x+1)^2} - \frac{1}{x} = \frac{4}{(x+1)^2} - \frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{4x-(x+1)^2}{x(x+1)^2} = \frac{4x-(x^2+1+2x)}{x(x+1)^2} = \frac{4x-x^2-1-2x}{x(x+1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-x^2-1+2x}{x(x+1)^2} = \frac{-(x^2+1-2x)}{x(x+1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-(x-1)^2}{x(x+1)^2} < 0, \text{ για κάθε } x > 0, x \neq 1.$$

Όμως, επειδή στο 1 η f είναι συνεχής, έχω ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2+\alpha^2}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Είναι

$$x^2 + \alpha^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ και } \alpha = 0,$$

οπότε για να ορίζεται η f στο $\mathbb{R}$ (αφού σ' αυτό είναι γνησίως αύξουσα), αρκεί να είναι $\alpha \neq 0$

Η f είναι, τότε, συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο συνεχών και παραγωγίσιμων, αντίστοιχα, συναρτήσεων, με

$$f'(x) = \frac{(e^x)' \cdot (x^2+\alpha^2) - e^x(x^2+\alpha^2)'}{(x^2+\alpha^2)^2} = \frac{e^x(x^2+\alpha^2) - e^x \cdot 2x}{(x^2+\alpha^2)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{e^x(x^2-2x+\alpha^2)}{(x^2+\alpha^2)^2}.$$

Επειδή είναι $e^x > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αλλά και $(x^2+\alpha^2)^2 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$, παρατηρώ ότι η f' δεν μηδενίζεται σε διάστημα, αλλά σε μεμονωμένα σημεία.

Έτσι, για να είναι η f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, αρκεί να είναι $f'(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Από την ανίσωση $f'(x) \geq 0$ έχω $x^2 - 2x + \alpha^2 \geq 0$, οπότε το τριώνυμο θα πρέπει να έχει διακρίνουσα $\Delta \leq 0$, δηλαδή να ισχύει

$$(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \alpha^2 \leq 0 \Rightarrow 4 - 4\alpha^2 \leq 0 \Rightarrow 1 - \alpha^2 \leq 0 \Rightarrow \alpha \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty).$$

Παράδειγμα

Να μελετήσετε την συνάρτηση $f(x) = -x^2 + x - 1$ ως προς την μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατά της.

Λύση

Είναι $D_f = \mathbb{R}$, στο οποίο η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική, με

$$f'(x) = -2x + 1.$$

Δημιουργώ τον ακόλουθο πίνακα μονοτονίας της f, απ' όπου προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+		−
$f(x)$	↗		↘

Στο $\frac{1}{2}$ η f παρουσιάζει μέγιστο, το

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1+2}{4} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}.$$

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x^2} + e^{8-x^2} - 2$.

Να μελετήσετε την μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατά της.

Είναι $D_f = \mathbb{R}$, στο οποίο η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών και παραγωγίσιμων, αντίστοιχα, συναρτήσεων, με

$$f'(x) = e^{x^2}\cdot(x^2)' + e^{8-x^2}\cdot(8-x^2)' = 2xe^{x^2} - 2xe^{8-x^2} \Rightarrow f'(x) = 2x(e^{x^2} - e^{8-x^2}).$$

Το πρόσημο του γινομένου $x(e^{x^2} - e^{8-x^2})$, άρα και της $f'(x)$, φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα

x	$-\infty$	-2	0	2 $+\infty$
x	−	−	+	+
$e^{x^2} - e^{8-x^2}$	+	−	−	+
$f'(x)$	−	+	−	+
f(x)	↘	↗	↘	↗

απ' όπου έχω ότι η f:

- είναι γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty, -2]$ και $[0, 2]$.
- είναι γνησίως αύξουσα στα $[-2, 0]$ και $[2, +\infty)$.
- για $x = -2$ έχει τοπικό ελάχιστο, το

$$f(-2) = e^{(-2)^2} + e^{8-(-2)^2} - 2 = e^4 + e^4 - 2 \Rightarrow f(-2) = 2e^4 - 2.$$

- για $x = 0$ έχει τοπικό μέγιστο, το

$$f(0) = e^{0^2} + e^{8-0^2} - 2 = 1 + e^8 - 2 \Rightarrow f(0) = e^8 - 1.$$

- για $x = 2$ έχει τοπικό ελάχιστο, το

$$f(2) = e^{2^2} + e^{8-2^2} - 2 \Rightarrow f(2) = 2e^4 - 2.$$

Παράδειγμα

Να βρείτε την μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

Λύση

Για να ορίζεται η f, πρέπει να είναι: $x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$.

Άρα είναι $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$, στο οποίο η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως ρητή συνάρτηση, με

$$f'(x) = \frac{(x^2)'\cdot(x-1) - x^2(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

Έτσι προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας μονοτονίας της f, απ' όπου έχω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, 0]$ και $[2, +\infty)$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στα $[0, 1)$ και $(1, 2]$.

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	−	−	+	
$f(x)$	↗	↘	↘	↗	

Από τον πίνακα επίσης έχω ότι:

- για $x = 0$ η f έχει τοπικό μέγιστο, το

$$f(0) = \frac{0^2}{0-1} \Rightarrow f(0) = 0.$$

- για $x = 2$ η f έχει τοπικό ελάχιστο, το

$$f(2) = \frac{2^2}{2-1} \Rightarrow f(2) = 4.$$

Παράδειγμα

Να βρείτε την μονονοτονία της συνάρτησης $f(x)=\begin{cases} x^3-3x \text{ , αν } x<0 \\ x^2-6x \text{ , αν } x\geq 0 \end{cases}$.

Λύση

Από τον τύπο της f συμπεραίνω ότι είναι $D_f=\mathbb{R}$.

Επειδή η f είναι συνεχής για κάθε $x<0$, ως πολυωνυμική, αλλά και για κάθε $x>0$, για τον ίδιο λόγο, θα εξετάσω αν είναι συνεχής στο 0, δηλαδή αν ισχύει:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=0^2-6\cdot 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=0.$$

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^3-3x)=0^3-3\cdot 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0.$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2-6x)=0^2-6\cdot 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0.$

Άρα είναι $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$, οπότε η f είναι συνεχής στο 0, συνεπώς είναι συνεχής στο $D_f=\mathbb{R}$.

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0)$ ως πολυωνυμική, με

$$f'(x)=3x^2-3 \Rightarrow f'(x)=3(x^2-1).$$

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πολυωνυμική, με

$$f'(x)=2x-6 \Rightarrow f'(x)=2(x-3).$$

Τα συμπεράσματα των περιπτώσεων (α) και (β) συνοψίζονται στον παρακάτω, συγκεντρωτικό πίνακα μονοτονίας της f

x	$-\infty$ 3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

απ' όπου έχω ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 3]$ και γνησίως αύξουσα στο $[3, +\infty)$.

Να μελετήσετε την συνάρτηση $f(x) = x - 2\sqrt{x-1}$ ως προς την μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατά της.

Για να ορίζεται η f, πρέπει να είναι $x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$, οπότε $D_f = [1, +\infty)$, στο οποίο είναι συνεχής ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων, ενώ είναι παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$, ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f'(x) = 1 - 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\cdot(x-1)' = 1 - \frac{1}{\sqrt{x-1}} \Rightarrow f'(x) = \frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x-1}}.$$

Έτσι έχω τον ακόλουθο πίνακα μονοτονίας της f

x	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	↘		↗

απ’ όπου προκύπτει ότι η f:

- είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, 2]$.
- είναι γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$.
- στο 2 παρουσιάζει ελάχιστο, το

$$f(2) = 2 - 2\sqrt{2-1} \Rightarrow f(2) = 0.$$

Επίσης, αφού το 1 είναι άκρο του D_f και $f'(x) < 0$, όταν $x > 1$, η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο 1, το

$$f(1) = 1 - 2\sqrt{1-1} \Rightarrow f(1) = 1.$$

Να βρείτε την μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = 3x^2, x \in [-3, 2]$.

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $A = [-3, 2]$ ως πολυωνυμική.

Είναι $f'(x) = 6x$, οπότε από την ανίσωση $f'(x) > 0$ εύκολα προκύπτει $x > 0$.

Από τον ακόλουθο πίνακα

x	-3	0	2
$f'(x)$	$-$	$+$	
$f(x)$	↘	↗	

έχω ότι η f είναι:

- γνησίως φθίνουσα στο $[-3, 0]$.
- γνησίως αύξουσα στο $[0, 2]$.

Επειδή η f ορίζεται σε κλειστό διάστημα, έχει ελάχιστο και μέγιστο.

Από τις τιμές $f(-3)$, $f(0)$, $f(2)$ η μικρότερη θα είναι το ελάχιστο και η μεγαλύτερη το μέγιστο της f.

- $f(-3) = 3(-3)^2 \Rightarrow f(-3) = 27$.
- $f(0) = 3 \cdot 0^2 \Rightarrow f(0) = 0$, που, προφανώς, είναι το ελάχιστο, όπως προκύπτει από τον παραπάνω πίνακα.
- $f(2) = 3 \cdot 2^2 \Rightarrow f(2) = 12$.

Άρα:

- για $x = 0$ η f έχει ελάχιστο, το $f(0) = 0$.
- για $x = -3$ η f έχει μέγιστο, το $f(-3) = 27$.

Να βρείτε την μονοτονία και τα ακρότατα των συναρτήσεων:

α) $f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 3$. **β)** $f(x) = x^2(x-1)^3$.

α) Είναι $D_f = \mathbb{R}$, στο οποίο η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική, με

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 16x \Rightarrow f'(x) = 4x(x^2 - 3x - 4).$$

x	$-\infty$	-1	0	4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$	
$f(x)$	↘	↗	↘	↗	

Από τον πίνακα μονοτονίας της f έχω ότι η f:

- είναι γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty, -1]$ και $[0, 4]$.
- είναι γνησίως αύξουσα στα $[-1, 0]$ και $[4, +\infty)$.
- για $x = -1$ έχει τοπικό ελάχιστο, το

$$f(-1) = (-1)^4 - 4(-1)^3 - 8(-1) + 3 = 1 + 4 - 8 + 3 \Rightarrow f(-1) = 0.$$

- για $x = 0$ έχει τοπικό μέγιστο, το $f(0) = 3$.
- για $x = 4$, έχει τοπικό ελάχιστο, το $f(4) = -125$ *(υπολογίστηκε με το σχήμα του Horner).*

β) Είναι $D_f = \mathbb{R}$, στο οποίο η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική, με

$f'(x) = (x^2)'\cdot(x-1)^3 + x^2\cdot[(x-1)^3]' = 2x(x-1)^3 + x^2\cdot 3(x-1)^2\cdot(x-1)' \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x) = 2x(x-1)^3 + 3x^2(x-1)^2 = x(x-1)^2\cdot[2(x-1)+3x] = x(x-1)^2(2x-2+3x) \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x) = x(5x-2)(x-1)^2$.

Από τον ακόλουθο πίνακα μονοτονίας της f

x	$-\infty$	0	$\frac{2}{5}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	–	+	
$f(x)$	↗	↘	↗	

έχω ότι η f:

- είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, 0]$ και $\left[\frac{2}{5}, +\infty\right)$.
- είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0, \frac{2}{5}\right]$.
- για $x = 0$ έχει τοπικό μέγιστο, το $f(0) = 0$.
- για $x = \frac{2}{5}$ έχει τοπικό ελάχιστο, το

$$f\left(\frac{2}{5}\right) = \left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}-1\right)^3 = \frac{2^2}{5^2}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{4}{5^2}\cdot\frac{-27}{5^3} \Rightarrow f\left(\frac{2}{5}\right) = -\frac{108}{5^5}.$$

Να μελετήσετε την μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης

$$f(x) = x\sqrt{1-x^2}.$$

Για να ορίζεται η f, πρέπει να είναι

$$1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 1 \leq 0 \Rightarrow x \in [-1, 1].$$

Άρα είναι $D_f = [-1, 1]$, στο οποίο η f είναι συνεχής ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων, ενώ είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f'(x) = (x)' \cdot \sqrt{1-x^2} + x \cdot \left(\sqrt{1-x^2}\right)' = \sqrt{1-x^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (1-x^2)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \sqrt{1-x^2} + \frac{x}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Από τον ακόλουθο πίνακα μονοτονίας της f

x	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	
$f(x)$	↘	↗	↘	

έχω ότι η f είναι:

- γνησίως φθίνουσα στα $\left[-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ και $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$.
- γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

Επειδή η f ορίζεται σε κλειστό διάστημα, έχει ελάχιστη και μέγιστη τιμή.

Από τις τιμές $f(-1)$, $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $f(1)$ η μικρότερη θα είναι το ελάχιστο και η μεγαλύτερη το μέγιστο της f.

- $f(-1) = -1 \cdot \sqrt{1-(-1)^2} \Rightarrow \boxed{f(-1) = 0}$.
- $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{1-\frac{2}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{1-\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}}.$$

- $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \Rightarrow \boxed{f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}}$.
- $f(1) = 1\cdot\sqrt{1-1^2} \Rightarrow \boxed{f(1) = 0}$.

Επομένως:

- για $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ η f έχει ελάχιστο, το $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}$.
- για $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ η f έχει μέγιστο, το $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

Να μελετήσετε την συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2+2x-9}{x^2-4}$ ως προς την μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατά της.

Για να ορίζεται η f, πρέπει να είναι

$$x^2-4\neq 0 \Rightarrow x^2\neq 4 \Rightarrow x\neq 2 \text{ και } x\neq -2.$$

Άρα είναι $D_f = \mathbb{R}-\{-2, 2\}$, στο οποίο η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως ρητή, με

$$f'(x) = \frac{(x^2+2x-9)'\cdot(x^2-4)-(x^2+2x-9)(x^2-4)'}{(x^2-4)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(2x+2)(x^2-4)-2x(x^2+2x-9)}{(x^2-4)^2} = \frac{2x^3-8x+2x^2-8-2x^3-4x^2+18x}{(x^2-4)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-2x^2+10x-8}{(x^2-4)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-2(x^2-5x+4)}{(x^2-4)^2}.$$

Από τον ακόλουθο πίνακα μονοτονίας της f

x	$-\infty$ -2	-2 1	1 2	2 4	4 $+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$
$f(x)$	↘	↘	↗	↗	↘

έχω ότι η f:

- είναι γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty, -2)$ και $(-2, 1]$ και $[4, +\infty)$.
- είναι γνησίως αύξουσα στα $[1, 2)$ και $(2, 4]$.
- για $x = 1$ έχει τοπικό ελάχιστο, το

$$f(1) = \frac{1^2+2\cdot 1-9}{1^2-4} = \frac{-6}{-3} \Rightarrow f(1) = 2.$$

- για $x = 4$ έχει τοπικό μέγιστο, το

$$f(4) = \frac{4^2+2\cdot 4-9}{4^2-4} = \frac{15}{12} \Rightarrow f(4) = \frac{5}{4}.$$

Να βρείτε την μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x+1}}$.

Για να ορίζεται η f, πρέπει να είναι

$$\left\{\begin{matrix}\sqrt{x+1}\neq 0 \ \text{ και} \\ x+1\geq 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix}x+1>0 \ \text{ και} \\ x+1\geq 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow x+1>0 \Rightarrow x>-1.$$

Άρα είναι $D_f=(-1,+\infty)$, στο οποίο η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών και παραγωγίσιμων, αντίστοιχα, συναρτήσεων, με

$$f'(x)=\frac{(x^2)'\cdot\sqrt{x+1}-x^2(\sqrt{x+1})'}{\sqrt{x+1}^2}=\frac{2x\sqrt{x+1}-x^2\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}\cdot(x+1)'}{x+1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{2x\sqrt{x+1}-\dfrac{x^2}{2\sqrt{x+1}}}{x+1}=\frac{\dfrac{4x\sqrt{x+1}^2-x^2}{2\sqrt{x+1}}}{x+1}=\frac{4x(x+1)-x^2}{2(x+1)\sqrt{x+1}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{4x^2+4x-x^2}{2(x+1)\sqrt{x+1}}=\frac{3x^2+4x}{2(x+1)\sqrt{x+1}}\Rightarrow f'(x)=\frac{x(3x+4)}{2(x+1)\sqrt{x+1}}.$$

Από τον ακόλουθο πίνακα μονοτονίας της f

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	↘		↗

έχω ότι η f:

- είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1, 0]$.
- είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.
- για $x=0$ έχει ελάχιστο, το $f(0)=0$.

Να μελετήσετε την μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = x^2 \cdot \ell nx$ και να βρείτε τα ακρότατά της.

Είναι $D_f = (0, +\infty)$, στο οποίο η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως γινόμενο συνεχών και παραγωγίσιμων, αντίστοιχα, συναρτήσεων, με

$$f'(x) = (x^2)' \cdot \ell nx + x^2 \cdot (\ell nx)' = 2x \cdot \ell nx + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \cdot \ell nx + x \Rightarrow f'(x) = x(2\ell nx + 1).$$

Επειδή είναι $x > 0$, το πρόσημο της $f'(x)$ εξαρτάται από το πρόσημο της παράστασης που είναι εντός της παρένθεσης, οπότε από την ανίσωση $f'(x) > 0$ έχω

$$2\ell nx + 1 > 0 \Rightarrow 2\ell nx > -1 \Rightarrow \ell nx > -\frac{1}{2} \Rightarrow x > e^{-\frac{1}{2}}.$$

Από τον ακόλουθο πίνακα μονοτονίας της f

x	0 $\quad$ $e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	↘	↗

έχω ότι η f:

- είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, e^{-\frac{1}{2}}\right]$.
- είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right)$.
- για $x = e^{-\frac{1}{2}}$ έχει ελάχιστο, το

$$f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = \left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^2 \cdot \ell ne^{-\frac{1}{2}} = e^{-1} \cdot \frac{-1}{2} \Rightarrow f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2e}.$$

Να βρείτε την μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$.

Επειδή είναι $e^x > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι $D_f = \mathbb{R}$, στο οποίο η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πηλίκο συνεχών και παραγωγίσιμων, αντίστοιχα, συναρτήσεων, με

$$f'(x) = \frac{(x)'\cdot e^x - x\cdot(e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{e^x - xe^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x(1-x)}{(e^x)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1-x}{e^x}.$$

Από τον ακόλουθο πίνακα μονοτονίας της f

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		−
$f(x)$	↗		↘

έχω ότι η f:

- είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$.
- είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$.
- για $x = 1$ έχει μέγιστο, το $f(1) = \dfrac{1}{e}$.

Να μελετήσετε τις ακόλουθες συναρτήσεις ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα:

α) $f(x) = (2x^2 + 3x)e^x$. **β)** $f(x) = (x - 1)e^x - (x + 1)e^{-x}$.

α) Είναι $D_f = \mathbb{R}$, στο οποίο η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως γινόμενο συνεχών και παραγωγίσιμων, αντίστοιχα, συναρτήσεων, με

$f'(x) = (2x^2 + 3x)'\cdot e^x + (2x^2 + 3x)\cdot(e^x)' = (4x + 3)e^x + (2x^2 + 3x)e^x \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x) = e^x(4x + 3 + 2x^2 + 3x) \Rightarrow f'(x) = e^x(2x^2 + 7x + 3)$.

Από τον ακόλουθο πίνακα

x	$-\infty$	-3	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	−	+	
$f(x)$	↗	↘	↗	

έχω ότι η f:

- είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, -3]$ και $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$.
- είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[-3, -\frac{1}{2}\right]$.
- για $x = -3$ έχει τοπικό μέγιστο, το

$$f(-3) = [2(-3)^2 + 3(-3)]\cdot e^{-3} = 9e^{-3} \Rightarrow f(-3) = \frac{9}{e^3}.$$

- για $x = -\frac{1}{2}$ έχει τοπικό ελάχιστο, το

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left[2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 3\cdot\frac{-1}{2}\right]e^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{2}{4} - \frac{3}{2}\right)\cdot\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{e}} \Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

β) Είναι $D_f = \mathbb{R}$, στο οποίο η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών και παραγωγίσιμων, αντίστοιχα, συναρτήσεων, με

$$f'(x) = (x-1)'\cdot e^x + (x-1)\cdot(e^x)' - (x+1)'\cdot e^{-x} - (x+1)\cdot(e^{-x})' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = e^x + (x-1)e^x - e^{-x} - (x+1)e^{-x}\cdot(-x)' = e^x + xe^x - e^x - e^{-x} + (x+1)e^{-x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = xe^x - e^{-x} + xe^{-x} + e^{-x} = xe^x + xe^{-x} \Rightarrow f'(x) = x(e^x + e^{-x}).$$

Από τον ακόλουθο πίνακα

x	$-\infty$	0 $+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	↘	↗

έχω ότι η f:

- είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.
- είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.
- για $x = 0$ έχει ελάχιστο, το $f(0) = (0-1)e^0 - (0+1)e^0 = -1 - 1 \Rightarrow f(0) = -2$.

1. Αντώνης Κόλλας, Υλικό από την προσωπική του ιστοσελίδα: http://www.kosmonaftis.gr/gomath/math.php
2. Μουρατίδης Χρ. Τζουβάλης Αθ., Υλικό από: http://blogs.sch.gr/cmour/files/2013/12/P-THEORHMA-ROLLE.pdf
3. Δημήτρης Μοσχόπουλος, Υλικό από: https://drive.google.com/file/d/0ByCvfxuwaBGtNXljVkhKZnlKWWc/view