Κοιλότητα

Διαφορικός Λογισμός
μιας μεταβλητής Ι

Κυρτή & Κοίλη συνάρτηση

Ορισμός:

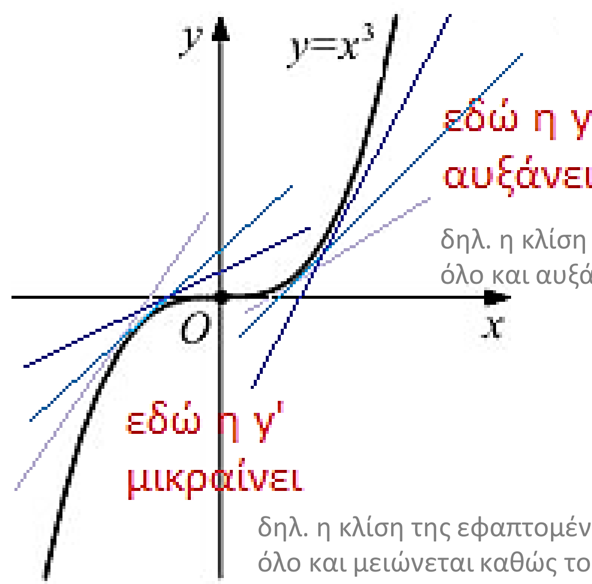
Έστω y=f(x): ∃ f’(x), λέμε ότι :

η f(x) στρέφει
- (1) τα κοίλα άνω στο (α, β) ανοικτό αν y’= f’(x) (γνησίως) αύξουσα στο (α, β) (κυρτή)
- (2) τα κοίλα κάτω στο (α, β) ανοικτό αν y’= f’(x) (γνησίως) φθίνουσα στο (α, β) (κοίλη)

Συμβολίζεται ως εξής:

(1) για κυρτή: ↺

(2) για κοίλη: ↷



y’=κλίση

δηλ. η κλίση της εφαπτομένης
όλο και αυξάνει καθώς το x μεγαλώνει

δηλ. η κλίση της εφαπτομένης
όλο και μειώνεται καθώς το x μεγαλώνει

Με άλλα λόγια η κοιλότητα μας δείχνει ΠΩΣ κάμπτεται η καμπύλη

Κριτήριο 2ης παραγώγου

Κριτήριο 2ης παραγώγου:Κ2ης για την κοιλότητα

Το γράφημα της f στρέφει:
(1) τα κοίλα άνω σε κάθε διάστημα όπου $y'' > 0$
(2) τα κοίλα κάτω σε κάθε διάστημα όπου $y'' < 0$

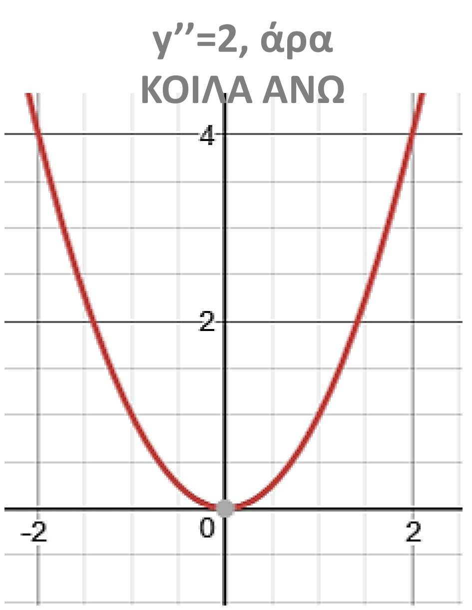
Παράδειγμα: Έστω $y=x^2$ (ΠΟ=$\mathbb{R}$)

- f συνεχής για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- f' ∃ για κάθε $x \in \mathbb{R}$: $f'(x)=2x$

Υπάρχει 1 μόνο κ.σ.: $x = 0$

Διάστημα	$-\infty < x < 0$	$0 < x < +\infty$
Πρόσημο f'	−	+
Συμπεριφορά f	↘	↗

(από Κ1ης)



- $y''=2 > 0$ για κάθε x σε κάθε διάστημα, άρα στρέφει τα κοίλα άνω

(από Κ2ης)

Άσκηση

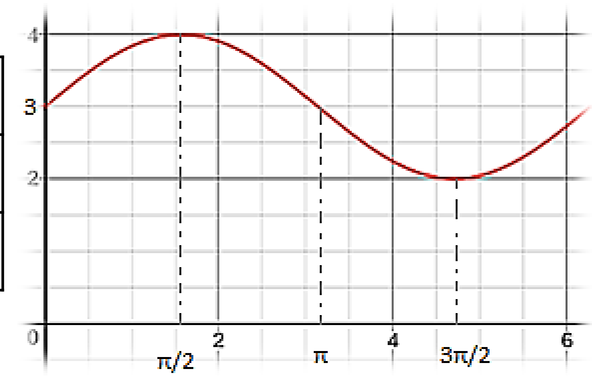
Ελέγξτε την κοιλότητα αν y = f(x) = 3+sinx στο διάστημα **[0, 2π]**

Λύση:

- f συνεχής για κάθε x ϵ [0, 2π]
- f’ ∃ για κάθε x ϵ (0, 2π): f’(x)=cosx

Υπάρχει 2 κ.σ.: x = π/2 & 3π/2 (όπου f’=0)

Διάστημα	**0 < x < π/2**	**π/2 < x < 3π/2**	**3π/2 < x < π**
Πρόσημο f’	**+**	**–**	**+**
Συμπεριφορά f	**↗**	**↘**	**↗**



- y’’ = -sinx
  < 0 στο (0, π/2) , άρα στρέφει τα κοίλα κάτω – όμοια στο (π/2, π)
  > 0 στο (π, 3π/2), άρα στρέφει τα κοίλα άνω – όμοια στο (3π/2, 2π)

ΠΡΟΣΟΧΗ: Δεν αναφερόμαστε στα ίδια διαστήματα

Σημεία καμπής

Ορισμός: Ένα σημείο της γραφικής παράστασης της f <u>όπου υπάρχει εφαπτομένη</u> και <u>όπου αλλάζει η κοιλότητα</u> λέγεται: σημείο καμπής

Δηλ. είναι ένα σημείο όπου η <u>f’’ **εκατέρωθεν** αλλάζει πρόσημο</u>

- Σε αυτό το σημείο η f’’: $\begin{cases} f'' = 0 \text{ ή} \\ f'' \text{ δεν ορίζεται} \end{cases}$

δηλ. τα σημεία καμπής είναι εσωτερικά σημεία: ή y’’= 0 ή y’’ δεν υπάρχει

- Αν λοιπόν υπάρχει η f’’ και $f''(x_0)= 0$ $\Rightarrow$ 1. x_0 είναι σημείο καμπής & 2. $(x_0 ,f'(x_0))$ τοπικό ακρότατο

ΠΡΟΣΟΧΗ: της **f’** τοπικό ακρότατο

Αναζήτηση σημείων καμπής

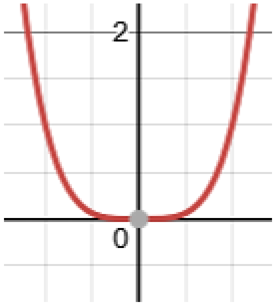
Θεώρημα:

Αν $(x_0, f(x_0))$ σημείο καμπής της f
& στο σημείο υπάρχει η f'' $\Rightarrow$ $f''(x_0)=0$

Άρα πιθανά σημεία καμπής είναι εσωτερικά σημεία: $\begin{cases} \text{ή } f'' = 0 \\ \text{ή } f'' \nexists \end{cases}$

Παρατήρηση: **Δεν ισχύει το αντίστροφο του Κ2ης** , δηλ.
«Ένα σημείο με f''=0 δεν είναι πάντα σημείο καμπής»

π.χ.: Έστω $f(x)=x^4$, άρα $f'(x)=4x^3$, γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$
και $f(x)=x^4$ κυρτή στο $\mathbb{R}$. Παρότι $f''(0) = 0$, δεν αλλάζει
το πρόσημό της εκατέρωθεν

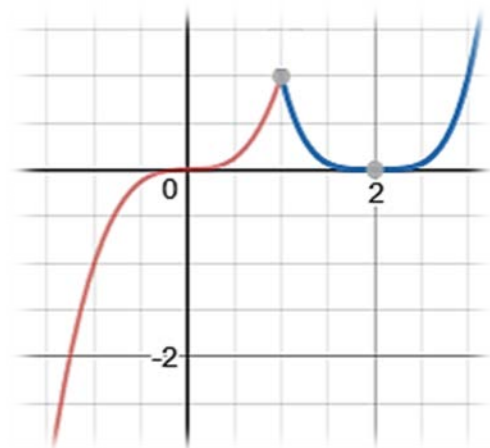


Παράδειγμα

Ελέγξτε την συμπεριφορά του γραφήματος της $f(x)= \begin{cases} x^3 & , x < 1 \\ (x-2)^4 & , x \geq 1 \end{cases}$

Λύση:

Το 1 είναι σημείο ένωσης δύο ξεχωριστών γραφημάτων, άρα δεν υπάρχει «ομαλή» συνέχεια



Υπάρχει η $f''(x)$ στο $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ και είναι

$$f''(x) = \begin{cases} 6x , & x < 1 \\ 12(x-2)^2, & x > 1 \end{cases}$$

Άρα κ.σ. είναι $\{0, 2\}$ (από $f''=0$) & το $\{1\}$ ($\nexists$ f'')

Διάστημα	**$-\infty < x < 0$**	**$0 < x < 1$**	**$1 < x < 2$**	**$2 < x < +\infty$**
Πρόσημο f''	**–**	**+**	**+**	**+**
Συμπεριφορά f	↷	↺	↺	↺

Άρα η f είναι <u>κοίλη στο 1ο διάστημα</u> και <u>κυρτή στα υπόλοιπα</u>

Άσκηση

Να βρείτε τα σημεία καμπής και την κοιλότητα της $f(x)=x^4-6x^2+5$

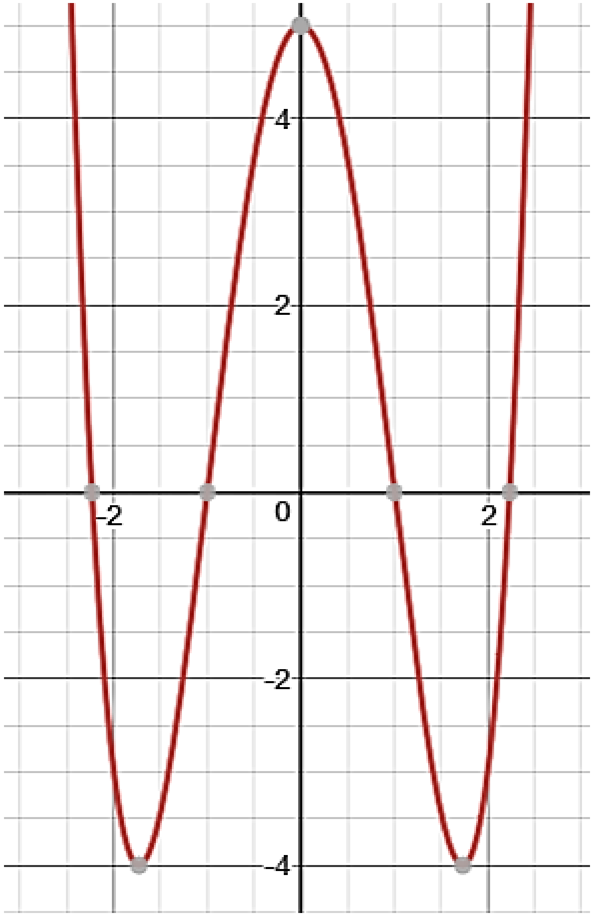
Λύση:

Η f'' υπάρχει στο $\mathbb{R}$

$f''(x) = 12x^2 - 12 = 12 \cdot (x-1) \cdot (x+1)$

Αν $f''(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$
(που είναι τα 2 κρίσιμα σημεία)

Διάστημα	**$-\infty < x < -1$**	**$-1 < x < 1$**	**$1 < x < +\infty$**
Πρόσημο f''	**+**	**–**	**+**
Συμπεριφορά f	↺	↷	↺



Δηλ. η f στα ακριανά διαστήματα έχει τα κοίλα προς τα πάνω ενώ στο μεσαίο προς τα κάτω

Θεώρημα (Κ2ης για τοπικά ακρότατα)

(i) Αν $\left.\begin{aligned} f'(c) &= 0 \\ \& \ f''(c) &< 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$ η f έχει τοπικό μέγιστο στο c

(ii) Αν $\left.\begin{aligned} f'(c) &= 0 \\ \& \ f''(c) &> 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$ η f έχει τοπικό ελάχιστο στο c

Η διαφορά με τα προηγούμενα είναι ότι εδώ ψάχνω μόνο το c & όχι μια περιοχή γύρω από αυτό

Το θεώρημα ΔΕΝ ισχύει αν $f''=0$ ή αν $f'' \nexists$.
Σε αυτή την περίπτωση εκτελούμε σύμφωνα με Κ1ης για τοπικά ακρότατα

Παράδειγμα

Ποια τα ακρότατα της $f(x) = x^3-12x-5$

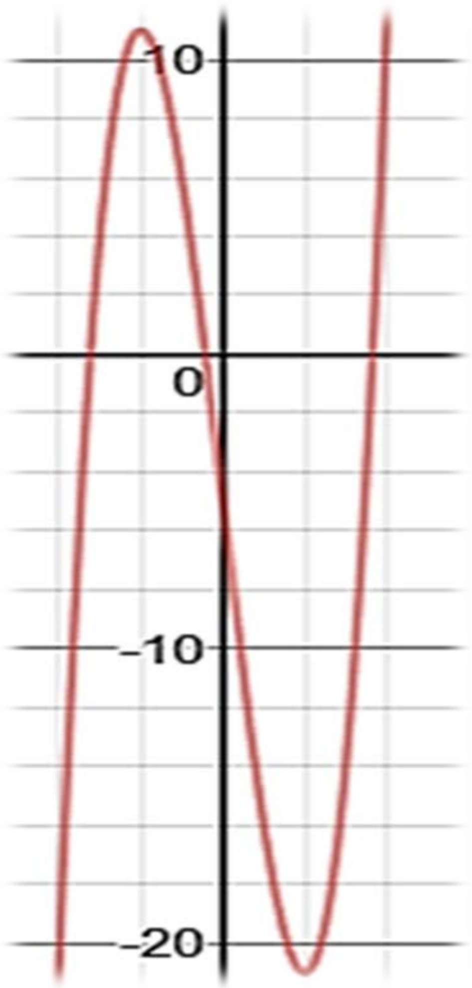
Λύση

(η f ορίζεται στο $\mathbb{R}$)

- $f'(x) = 3(x^2-4)$
- $f''(x) = 6x$

Άρα ως κ.σ. έχω τα ± 2

- $f''(-2) = -12 < 0$, δηλ. η f στο -2 παρουσιάζει τοπικό μέγιστο ($f(-2) = 11$)
- $f''(2) = 12 > 0$, δηλ. η f στο 2 παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο ($f(2) = -21$)



Παράδειγμα (**σχεδίασης της f με χρήση των f’ & f’’**)

Έστω η συνάρτηση: $f(x)=x^4-4x^3+10$:

(α) να προσδιορίσετε τα ακρότατά της

(β) να βρείτε σε ποια διαστήματα είναι γνησίως μονότονη

(γ) να βρείτε πότε στρέφει τα κοίλα άνω ή κάτω

(δ) να σχεδιάσετε ένα ορθό γράφημα

ΠΡΟΣΟΧΗ: αυτά είναι τα βήματα που κάνουμε για ένα γράφημα

Λύση:

(α)• f συνεχής για κάθε $x \in \mathbb{R}$

• f’ ∃: $f'(x)= 4x^2(x-3)$

Υπάρχουν 2 κ.σ.: {0, 3}

Από Κ1ης ∃ τοπικό ελάχιστο στο 3

Διάστημα	**−∞< x < 0**	**0 < x < 3**	**3 < x < +∞**
Πρόσημο f’	**−**	**−**	**+**
Συμπεριφορά f	↘	↘	↗

(β) $f''(x)=12x(x-2)$ που μηδενίζεται στα {0, 2}

Διάστημα	**x < 0**	**0 < x < 2**	**2 < x**
Πρόσημο f’’	**+**	**−**	**+**
Συμπεριφορά f	↺	↷	↺

δηλ. η f στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω στα ακριανά διαστήματα και προς τα κάτω στο μεσαίο (**Κ2ης**)

συνέχεια →

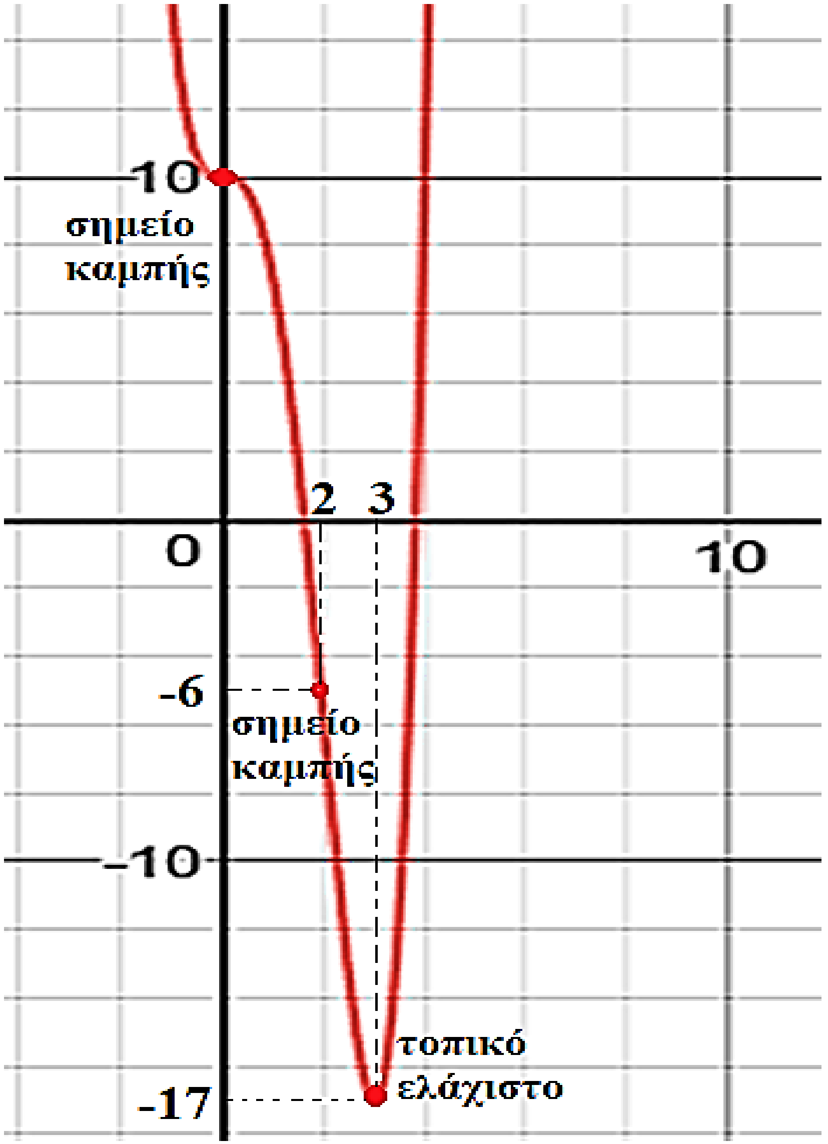
Παράδειγμα (συνέχεια)

Συνοψίζοντας τώρα και τους δύο πίνακες, έχουμε:

x < 0	0 < x < 2	2 < x < 3	3 < x
↘	↘	↘	↗
↺	⤼	↺	↺

f(0) = 10 f(2) = - 6 f(3) = - 17

και το γράφημα γίνεται:



ΒΗΜΑΤΑ ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ

1. Βρίσκω τις f’ & f’’

2. Βρίσκω πού η f είναι γνησίως μονότονη
(↘ & ↗)

3. Βρίσκω την κοιλότητα στα σημεία καμπής
(↺ & ↷)

4. Συνοψίζω τα σημεία & κάνω το γράφημα