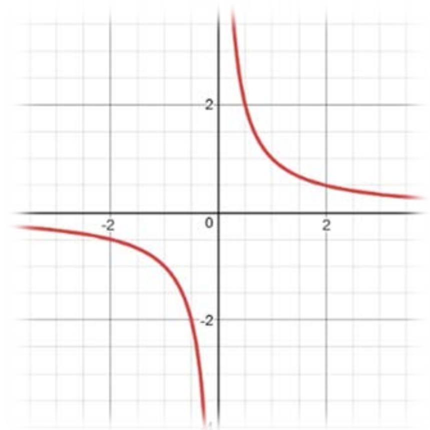
Ασύμπτωτες

Διαφορικός Λογισμός
μιας μεταβλητής Ι

Άπειρα όρια: **Οριζόντιες και κατακόρυφες ασύμπτωτες**



Έστω η f(x)=1/x, τότε παρατηρούμε ότι:

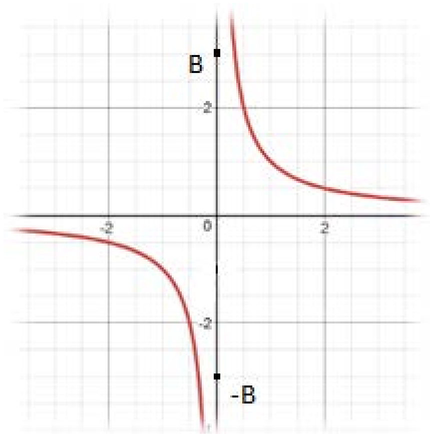
- καθώς x→+∞, (1/x)→0 & $\lim_{x \to +\infty} (\frac{1}{x}) = 0$
- καθώς x→-∞, (1/x)→0 & $\lim_{x \to -\infty} (\frac{1}{x}) = 0$

Λέμε ότι η γραφική παράσταση «τείνει ασυμπτωτικά» σε μια ευθεία όταν η απόσταση του γραφήματος της συνάρτησης και της ευθείας τείνει στο μηδέν. Η ευθεία λέγεται «ασύμπτωτη» της γραφικής παράστασης

Επίσης στο π.χ. της f(x)=1/x, όποιο B>0 και να διαλέξω πάνω στην (ασύμπτωτη) yy', υπάρχουν άπειρα x τ.ώ. f(x)>B,

δηλ. $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (\frac{1}{x}) = +\infty$

(Όμοια για f(x)<-B, δηλ. $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (\frac{1}{x}) = -\infty$)



Ορισμός

Μία ευθεία y=b είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης y=f(x) αν ισχύει ότι:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b \quad ή \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=b$$

Μία ευθεία x=α είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης y=f(x) αν ισχύει ότι:

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty \quad ή \quad \lim_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty$$

Παράδειγμα

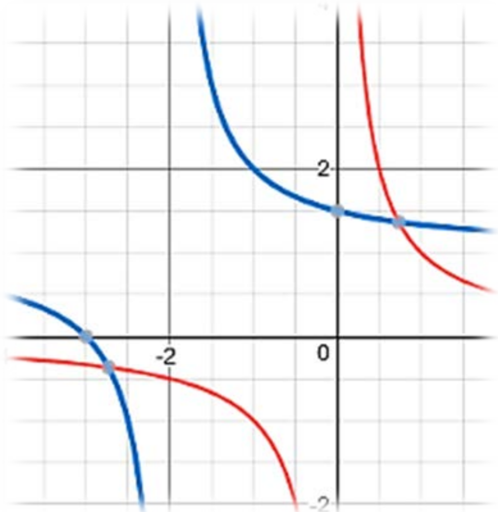
Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της $y=\frac{x+3}{x+2}$

δηλ. να βρούμε την συμπεριφορά της y καθώς

1. x→ ±∞
2. x→ - 2 (όπου μηδενίζεται ο παρονομαστής)

Επειδή: $y=\frac{x+3}{x+2}=1+\frac{1}{x+2}$

Έχω το γράφημα της 1/x μετατοπισμένο 1 μονάδα πάνω και 2 μονάδες αριστερά. Άρα οι ασύμπτωτες είναι οι y=1 και x=-2



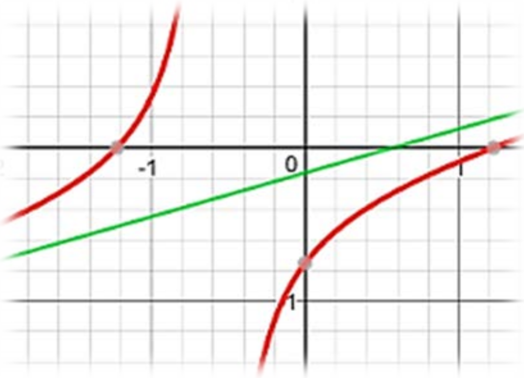
Πλάγια ασύμπτωτη ρητών συναρτήσεων με βαθμός αριθμητής = βαθμός παρονομαστής +1

Βρίσκουμε την πλάγια ασύμπτωτη διαιρώντας κατά μέλη ώστε να εκφράσουμε την συνάρτηση με κάποιο <u>υπόλοιπο</u> τ.ώ. τείνει στο 0 όταν x→ ±∞

(δηλ. της μορφής: (αx+β)+υ(x))

Παράδειγμα: Ποια η πλάγια ασύμπτωτη της

$$y = \frac{2x^2-3}{7x+4} = \underbrace{(\frac{2}{7}x - \frac{8}{49})}_{\text{γραμμική συνάρτηση } g(x)} - \underbrace{\frac{115}{49(7x-4)}}_{\text{υπόλοιπο}}$$



Καθώς x→ ±∞ το <u>υπόλοιπο</u> →0, δηλ. η g(x) είναι η πλάγια ασύμπτωτη της f(x) = y

$$\frac{2x^2-3}{7x+4} = (\frac{2}{7}x - \frac{8}{49}) \cdot (7x+4) - \frac{115}{49}$$

$$\text{Άρα y=}\frac{2x^2-3}{7x+4} = \frac{(\frac{2}{7}x - \frac{8}{49}) \cdot (7x+4) - \frac{115}{49}}{7x+4} = (\frac{2}{7}x - \frac{8}{49}) - \frac{115}{49(7x+4)}$$

Άσκηση

Ποια η πλάγια ασύμπτωτη της $f(x) = \dfrac{2x^2 - 4x - 9}{x - 1}$

Υπόδειξη: όπως η προηγούμενη άσκηση (ασύμπτωτη: y=2x-2)

Κανόνες de l’ Hospital

Υπάρχουν περιπτώσεις όπου οδηγούμαστε να βρούμε το όριο σε μορφές όπως:
0/0 ή ±∞ / ±∞ (π.χ. $f(x)=(e^x-1)x^3$)

1ο Θεώρημα de l’ Hospital (για 0/0):

όπου x_0 πεπερασμένο ή ±∞

Αν
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0 \ \& \ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0 \\ \& \ \exists \ \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \ \text{πεπερασμένο ή } \pm\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2ο Θεώρημα de l’ Hospital (για ±∞/±∞):

όπου x_0 πεπερασμένο ή ±∞

Αν
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty \ \& \ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty \\ \& \ \exists \ \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \ \text{πεπερασμένο ή } \pm\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

τα παραπάνω θεωρήματα ισχύουν και για πλευρικά όρια

Παράδειγμα

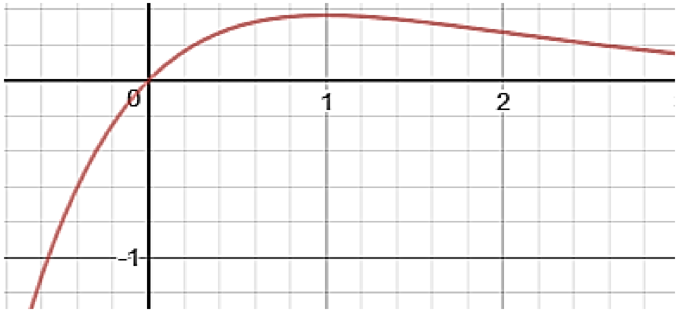
Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{x}}}{\mathrm{x}}$

Λύση:

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{x}}}{\mathrm{x}}=\dfrac{+\infty}{+\infty}$ θα χρησιμοποιήσω το 2ο Θεώρημα:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{x}}}{\mathrm{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\mathrm{e}^{\mathrm{x}})'}{\mathrm{x}'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{x}}}{1}=+\infty$$

Άσκηση



Ποιες είναι οι ασύμπτωτες ευθείες

της συνάρτησης $f(x) = x/e^x$?

Λύση:

- f συνεχής στο $\mathbb{R}$
- Από την C_f βλέπω ∄ κατακόρυφη ασύμπτωτη
- Άρα θα ψάξω το όριο στο ± **∞**

(i)
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{\lim\limits_{x\to-\infty} 1}{\lim\limits_{x\to-\infty} e^x}$$

που είναι της μορφής $\frac{1}{0}$, το οποίο δεν ορίζεται

δηλ. η **f δεν έχει ασύμπτωτη στο -∞**

(ii)
$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{f(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{e}^{\mathrm{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{x}}} = 0$$

δηλ. **η f έχει ασύμπτωτη στο +∞**
την ευθεία y=0

Μελέτη & Χάραξη της C_f

Βήμα 1ο: Βρίσκω το Π.Ο.(f)

Βήμα 2ο: Εξετάζω την συνέχεια της f στο Π.Ο.(f)

Βήμα 3ο: (3i) Βρίσκω τις f’ και f’’

(3ii) Κατασκευάζω τους πίνακες των πρόσημων

(3iii) Από την f’ προσδιορίζω τα ακρότατα της f

(3iv) Από την f’’ προσδιορίζω τα διαστήματα κοιλότητας

Βήμα 4ο: Μελετάω την συμπεριφορά της C_f με τις ασύμπτωτες

Βήμα 5ο: Συνοψίζω και δημιουργώ την C_f

Μην ξεχνάτε:
- αν **f άρτια** → η C_f συμμετρική yy’
- αν **f περιττή** → η C_f συμμετρική xx’
- αν **f περιοδική με περίοδο T** → ψάχνω την C_f μόνο σε διάστημα πλάτους T

Πορίσματα

Αποδεικνύεται πώς:

(α) οι πολυωνυμικές συναρτήσεις που έχουν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 2, **δεν έχουν ασύμπτωτες**

(β) οι ρητές συναρτήσεις με βαθμό αριθμητή μεγαλύτερο ή ίσο των 2 μονάδων του βαθμού του παρονομαστή, δεν έχουν **πλάγιες ή οριζόντιες** ασύμπτωτες

Άσκηση

Να μελετηθεί γραφικά η συνάρτηση $y = x^4-4x^3+11$

Λύση:

1. Π.Ο.(f) = $\mathbb{R}$
2. f συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική συνάρτηση
3. $f'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$

   Και $f'=0$ δίνει τα κ.σ. {0, 3} (0 διπλή)

Διάστημα	**x < 0**	**0 < x < 3**	**3 < x**
Πρόσημο f’	**–**	**–**	**+**
Συμπεριφορά f	↘	↘	↗

δηλ. στο (3, f(3))
∃ τοπικό ελάχιστο

$f''(x)=12(x-2)$

Και $f''=0$ δίνει τα σημεία καμπής {0,2}

Διάστημα	**x < 0**	**0 < x < 2**	**2 < x**
Πρόσημο f’’	**+**	**–**	**+**
Συμπεριφορά f	↺	↷	↺

δηλ. στα ακριανά διαστήματα η f στρέφει τα κοίλα πάνω, ενώ στο μεσαίο τα στρέφει κάτω

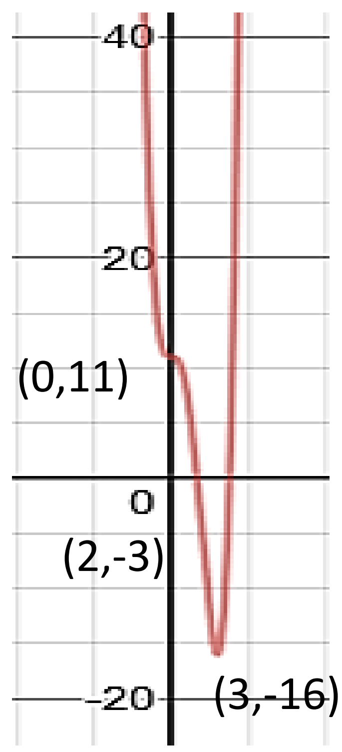
συνεχίζεται →

Άσκηση (συνέχεια)

4. Η f δεν έχει ασύμπτωτες αφού είναι πολυωνυμική βαθμού μεγαλύτερου - ίσου του 2
5. Άρα ο πίνακας μεταβολών της f γίνεται:

Δ	x < 0	0 < x < 2	2 < x < 3	3 < x
f’	–	–	–	+
f’’	+	–	+	+
f	⤻	↷	↷	⤻

f(0)=11 f(2)=-3 f(3)=-16



Άσκηση

Να μελετηθεί γραφικά η συνάρτηση $y = (x^2-x+4)/(x-1)$

1. Π.Ο.(f) = $\mathbb{R}\setminus\{1\}$
2. f συνεχής ως ρητή στο Π.Ο.(f)
3. $f'(x)=(x^2-2x-3)/(x-1)^2$, άρα αν $f'=0$ έχω σ.κ. τα $\{-1,3\}$

Διάστημα	**x < -1**	**-1 < x < 1**	**1 < x < 3**	**3 < x**
Πρόσημο f'	**+**	**–**	**–**	**+**
Συμπεριφορά f	↗	↘	↘	↗

$f''(x)=8/(x-1)^3$, άρα αν $f''=0$ έχω σ.κ. το $\{1\}$

Διάστημα	**x < 1**	**1 < x**
Πρόσημο f''	**–**	**+**
Συμπεριφορά f	↷	↺

συνεχίζεται →

Άσκηση (συνέχεια)

4. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ & $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ άρα η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την x=1

- Εξετάζω αν ∃ ασύμπτωτη οριζόντια

$$\left.\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x + 4}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(x-1)+4}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} x + \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{x-1}\right\} \Rightarrow$$

Η y=x ασύμπτωτη της C_f στο +∞

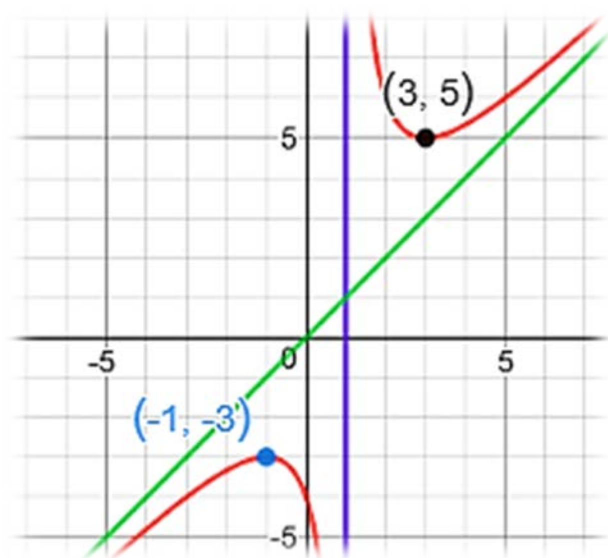
δηλ. μιας γραμμικής g(x) + υπόλοιπο
(υπόλοιπο που τείνει στο 0 όταν το x→ + ∞)

- Όμοια αποδεικνύω ότι y=x ασύμπτωτη της C_f στο -∞

5. Άρα ο πίνακας μεταβολών:

Δ	x < -1	-1< x <1	1 < x < 3	3 < x
f’	+	–	–	+
f’’	–	–	+	+
f	⤻	↷	↷	⤻

f(-1)=-3 f(3)=5



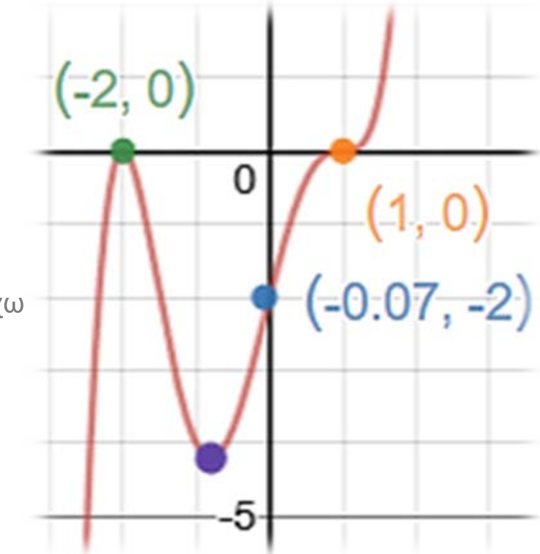
Άσκηση

Να μελετηθεί γραφικά η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{2}(x+2)^2(x-1)^3$

1. Π.Ο.(f) = $\mathbb{R}$
2. f συνεχής στο Π.Ο. ως πολυωνυμική
3. f’=0 → κ.σ. {-2, -4/5, 1}

   f’’=0 → σ.κ. {-1.5, -0.07, 1}

Υπόδειξη: Αν κάνω πράξεις θα έχω μια πολυωνυμική βαθμού 5



4. Δεν υπάρχουν ασύμπτωτες (άσκηση)
5. Ο πίνακας μεταβολών:

Δ	**x <- 2**	**-2< x <-1.5**	**-1.5 < x <-0.8**	**-0.8 < x<-0.07**	**-0.07< x<1**	**1<x**
f’	+	–	–	+	+	+
f’’	–	–	+	+	–	+
f	⤻	↷	↷	⤻	⤻	⤻

f(-2)=0 f(-0.8)=-4.20 f(-0.07)=-2 f(1)=1

Άσκηση

Να μελετηθεί γραφικά η συνάρτηση y=lnx/x

1. Π.Ο.(f) = (0, +∞)
2. f’=0 → κ.σ. {0, e} & f’’=0 → σ.κ. τα {0, $e^{3/2}$}

$$f'(x) = \frac{(\ln x)' \cdot x - \ln x \cdot x'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

H f’ μηδενίζεται στο e και δεν ορίζεται στο 0

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - (1 - \ln x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-3 + 2\ln x}{x^3}$$

H f’’ μηδενίζεται στο $e^{3/2}$ και δεν ορίζεται στο 0

Δ	**0<x <e**	**e< x <$e^{3/2}$**	**$e^{3/2}$ < x**
f’	+	–	–
f’’	–	–	+
f	↷	↷	⤻