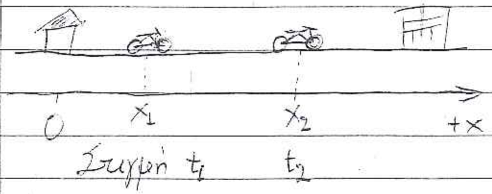
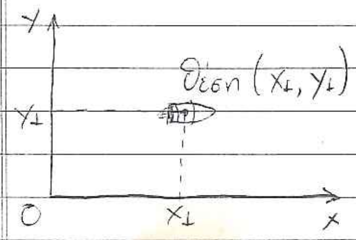
ΦΥΣΙΚΗ-Ι

ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

Χρονική περιγραφή

Θέση (που βρίσκεται;)





Η θέση περιγράφεται με καρτεσιανές συντεταγμένες

"κυλάει" ο χρόνος → αλλάζει η θέση, άρα γενικά περιγράφεται από $(x(t), y(t)) = \vec{r}(t)$

$x(t)$, $y(t)$: εξισώσεις κίνησης
$\vec{r}(t)$: διάνυσμα θέσης

π.χ.

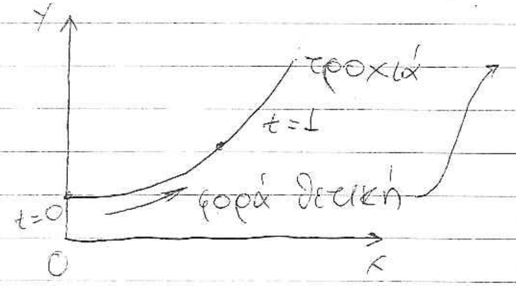
Η θέση ενός πλοιαρίου σε λίμνη περιγράφεται από τις εξισώσεις κίνησης: $x(t) = 5t$ (1), $y(t) = 50t^2 + 1$ (2). Βρείτε την εξίσωση της τροχιάς του, σχεδιάστε τη και δείξτε την φορά της κίνησης.

Εξίσωση τροχιάς είναι η σχέση που συνδέει x και y, π.χ. $y=f(x)$ ή $x=g(y)$ ή $h(x,y)=0$.

→ θα απαλείψω το t από τις ①,②

① $\Rightarrow t = \frac{x}{5}$

$$② \overset{①}{\Rightarrow} y = 50\left(\frac{x}{5}\right)^2 + 1 \Rightarrow \boxed{y = 2x^2 + 1}$$



Για να δείξω τη φορά της κίνησης παίρνω δύο τυχαίες χρονικές στιγμές
$t=0$: $x=0$, $y=1$
$t=1$: $x=5$, $y=51$

⊛ Τα x,y έχουν μονάδα μέτρησης το m οπότε στις χρονικές εξισώσεις προσέχουμε και τις μονάδες των συντελεστών του χρόνου t, που είναι μονάδες στο SI!!!

π.χ. στις ①, ②

$$x(t) = \underbrace{5}_{m/s}t \qquad y(t) = \underbrace{50}_{m/s^2}t^2 + \underbrace{1}_{m}$$

Πόσο γρήγορα ή αργά αλλάζει η θέση;

• Έστω κινητό που την στιγμή t_1 είναι στο x_1 και λίγο αργότερα, t_2 είναι x_2.

$$\underbrace{\text{Μεταβολή θέσης}}_{\text{Μετατόπιση}} = \underbrace{x_2 - x_1}_{\text{σύμβολο: } \Delta x}$$

Η Δx πραγματοποιήθηκε σε χρονικό διάστημα $\Delta t = t_2 - t_1$

Ορίζουμε την μέση ταχύτητα $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ (v_μ) και μετριέται σε 1 m/s.

Στιγμιαία ταχύτητα: $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \boxed{\frac{dx}{dt} = v}$

δηλαδή η στιγμιαία ταχύτητα είναι η $1^η$ παράγωγος της θέσης (ως προς το χρόνο).

π.χ. Η θέση $x(t) = v_0 \cdot t + x_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$ μιας σφαίρας που πέφτει μέσα στο νερό (με v_0, x_0, τ σταθερές). Βρείτε την $v(t)$.

Παραγωγίζω $x(t)$ και βρίσκω την v:

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \frac{d(v_0 \cdot t + x_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}})}{dt} \Rightarrow$$

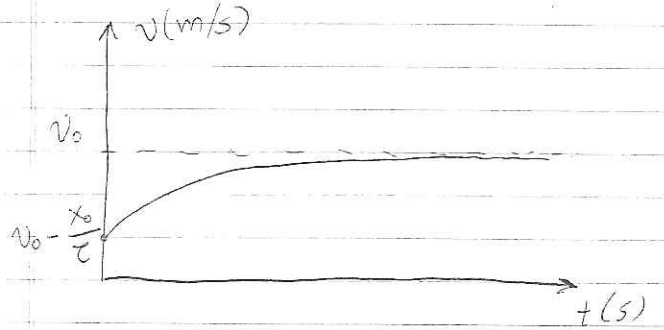
$$\Rightarrow v = \frac{d(v_0 \cdot t)}{dt} + \frac{d(x_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}})}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = v_0 \frac{dt}{dt} + x_0 \frac{d(e^{-\frac{t}{\tau}})}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = v_0 + x_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \frac{d(-\frac{t}{\tau})}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = v_0 + x_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \left(-\frac{1}{\tau}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{v(t) = v_0 + x_0 \frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau}}$$

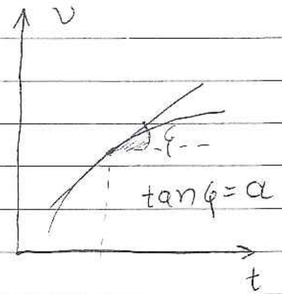


Πόσο γρήγορα αλλάζει η ταχύτητα;

Μέσος ρυθμός μεταβολής ταχύτητας $= \frac{\Delta v}{\Delta t} = \bar{a}$

$\bar{a}$: μέση επιτάχυνση

Στιγμιαία επιτάχυνση $\boxed{a = \frac{dv}{dt}}$



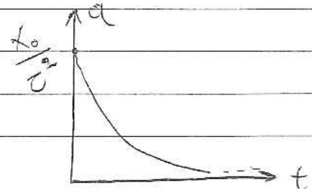
π.χ. πτώση σφαίρας στο νερό

$$v = v_0 - \frac{x_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (\text{με } v_0, x_0, \tau \text{ σταθερές})$$

τότε $a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow a = \frac{d(v_0 - \frac{x_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}})}{dt} \Rightarrow$

$$\Rightarrow a = \frac{d(v_0)}{dt} - \frac{d(\frac{x_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}})}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = -\frac{x_0}{\tau} \cdot \frac{d(e^{-\frac{t}{\tau}})}{dt} \Rightarrow \boxed{a = \frac{x_0}{\tau^2} e^{-\frac{t}{\tau}}}$$



Αντίστροφα της παραγώγισης δηλ. χρησιμοποιώντας ολοκλήρωμα, κινούμεαστε σε προβλήματα που δίνουν v και ζητάνε Δx ή δίνουν a και ζητάνε Δv ή δίνουν $\frac{da}{dt}$ και

Ζητάνε Δa : Ξέρω v:

$$v = \frac{dx}{dt} \Leftrightarrow v\,dt = dx \Leftrightarrow \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = \int_{x_1}^{x_2} dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = \Big[x\Big]_{x_1}^{x_2} \Leftrightarrow x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\Delta x = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt}$$, με Δx: μετατόπιση

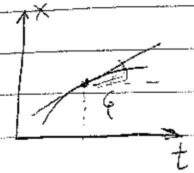
Ξέρω a: $a = \frac{dv}{dt} \Leftrightarrow a\,dt = dv \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt = \int_{v_1}^{v_2} dv \Leftrightarrow \int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt = \Big[v\Big]_{v_1}^{v_2} \Leftrightarrow$$

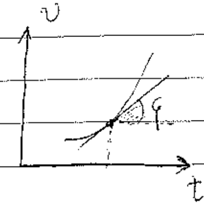
$$\Leftrightarrow v_2 - v_1 = \int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt \Leftrightarrow \boxed{\Delta v = \int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt}$$

με Δv: μεταβολή ταχύτητας

Επίσης:

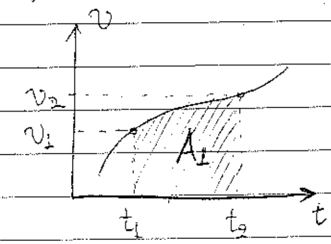


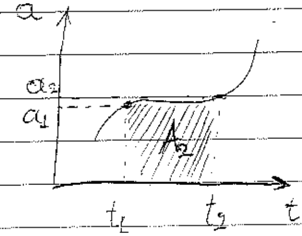
$\boxed{\tan\varphi = v}$, φ: κλίση εφαπτόμενης στην γρ. παράσταση



$\boxed{\tan\varphi = a}$

→ Τι συμβολίζει το εμβαδό ανάμεσα σε άξονα των t και της γραφικής παράστασης για v, a:





$$E(A_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt \Rightarrow \boxed{E(A_1) = \Delta x}$$

$$E(A_2) = \int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt \Rightarrow \boxed{E(A_2) = \Delta v}$$

Θυμάμαι: $x(t) \xrightarrow{d/dt} v(t) \xrightarrow{d/dt} a(t)$

$\Delta x \xleftarrow{\int dt} v(t)$, $\Delta v \xleftarrow{\int dt} a(t)$

Παραδείγματα

1) Η ταχύτητα δίνεται από την σχέση $v(t) = -2t^2 + 2$. Βρείτε την θέση του κινητού την στιγμή $t = 2$ sec αν για $t = 0$, $x = -2$ m.

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v\,dt \Rightarrow dx = v(t)\,dt \Rightarrow$$

x → αυτό ψάχνουμε

$$\Rightarrow \int_{t=0}^{t=2} v(t)\,dt = \int_{x=-2}^{x} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[x\right]_{-2}^{x} = \int_0^2 (-2t^2+2)\,dt \Rightarrow \left[x\right]_{-2}^{x} = \left[-\frac{2}{3}t^3 + 2t\right]_0^2 \Rightarrow$$

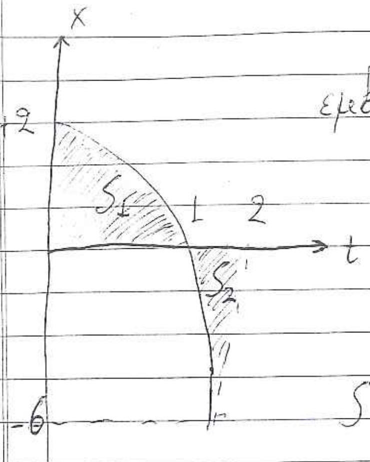
$$\Rightarrow x - (-2) = \left(-\frac{2}{3}\cdot 8 + 2\cdot 2\right) - 0 \Rightarrow x + 2 = 4 - \frac{16}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = -\frac{10}{3}\ m}$$

Πόσο μετατοπίστηκε συνολικά;

$$\Delta x(0 \to 2s) = x(2) - x(0) = -\frac{10}{3} - (-2) = -\frac{10}{3} + \frac{6}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta x = -\frac{4}{3}\ m}$$



$$\text{εμβαδό} = \int_0^2 v(t)\,dt = \Delta x = -\frac{4}{3}\ m$$

Πόσο είναι το μήκος της τροχιάς του; (ένδειξη του κοντέρ)

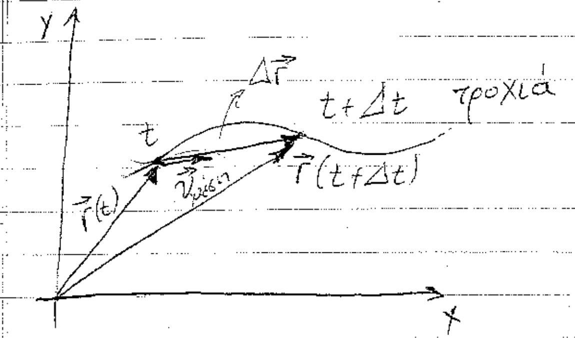
$$S = S_1 + S_2 = \Delta x_1 + \Delta x_2 =$$

$$= \int_0^1 v(t)\,dt + \left|\int_1^2 v(t)\,dt\right| = \left[-\frac{2}{3}t^3 + 2t\right]_0^1 + \left|\left[-\frac{2}{3}t^3 + 2t\right]_1^2\right| =$$

$$= -\frac{2}{3} + 2 + \left|-\frac{16}{3} + 4 + \frac{2}{3} - 2\right| = \frac{4}{3} + \left|-\frac{8}{3}\right| = \frac{12}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{S = 4\ m}$$

Κίνηση σε 2 και 3 διαστάσεις



$\vec{r}$ = διάνυσμα θέσης

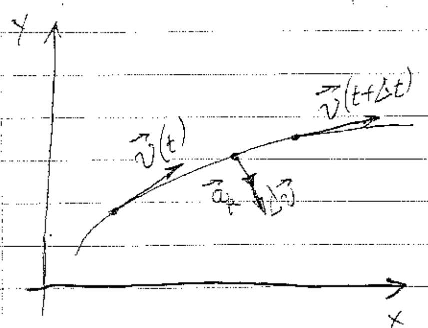
Μετατόπιση = $\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) = \Delta\vec{r}$

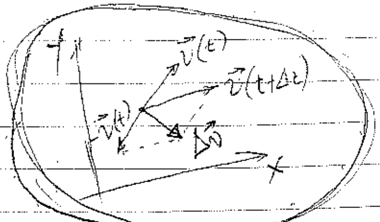
Μέση ταχύτητα = $\vec{v}_{μέση} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$

- $d\vec{r}$, dt τείνουν στο 0, τότε $d\vec{r}$ εφάπτεται της τροχιάς

άρα $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ = εφαπτόμενη της τροχιάς

Επιτάχυνση





$\vec{\alpha}_μ = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$

$\Delta\vec{v} = \vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)$

Η φορά της $\vec{\alpha}$ είναι πάντα προς το κοίλο μέρος της τροχιάς.

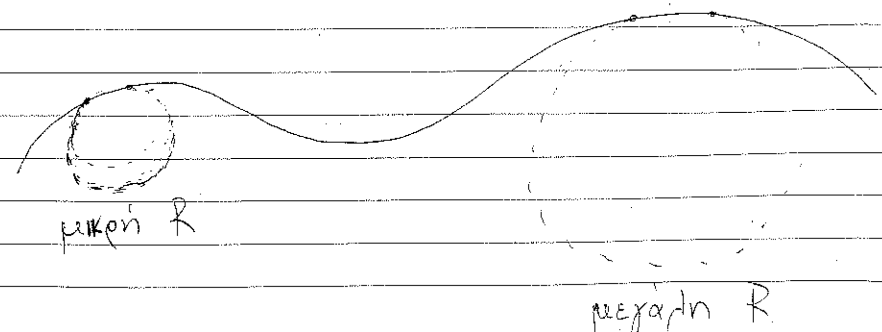
$\vec{\alpha} = (\alpha_x, a_y)$, $\alpha_x = \dfrac{dv_x}{dt}$, $\alpha_y = \dfrac{dv_y}{dt}$

$\vec{\alpha} = \vec{a}_t + \vec{a}_r$, a_t = εφαπτομενική (ή επιτρόχιος)
a_r = ακτινική (ή κεντρομόλος)

a_t: πόσο γρήγορα αλλάζει το μέτρο της $\vec{v}$
a_r: πόσο γρήγορα αλλάζει η διεύθυνση της $\vec{v}$

$\alpha_t = \dfrac{d|\vec{v}|}{dt}$

$\alpha_r = \dfrac{|\vec{v}|^2}{R}$, R = ακτίνα καμπυλότητας

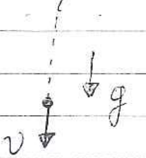


π.χ ομαλή κυκλική κίνηση

$\upsilon =$ σταθ. $\quad R =$ σταθ

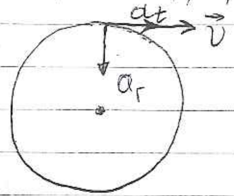
$a_t = 0 \qquad a_r \neq 0$ (σταθερή)

π.χ ελεύθερη πτώση



$a_t = g$
$a_r = 0$

π.χ. μεταβαλλόμενη κυκλική (επιταχυνόμενη)

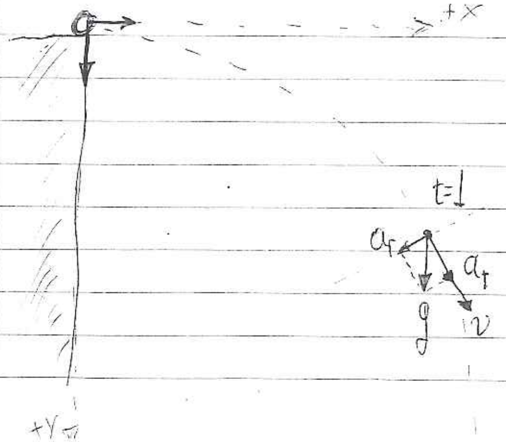


$\upsilon \uparrow$ άρα $a_t \neq 0$, $a_r \neq 0$

π.χ οριζόντια βολή (στο κενό) με αρχική ταχύτητα $\upsilon_0 = 10\ m/s$. Υπολογίστε:

α) την R την στιγμή $t=0$

β) την a_t την στιγμή $t=1\ s$



α) $a_r = \frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow R = \frac{\upsilon^2}{a_r}$

$\upsilon(0) = \upsilon_0$

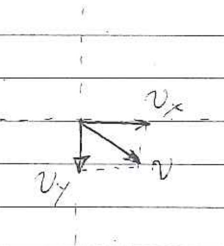
κάθε στιγμή ισχύει $\vec{a} = \vec{g}$

Την στιγμή $t=0$, $a_r = g$ γιατί $g \perp \upsilon(0)$

Οπότε $R = \frac{\upsilon_0^2}{g} \Rightarrow \boxed{R = 10\ m}$

β) $a_t = \frac{d|\vec{\upsilon}|}{dt}$

$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2}$ (από πυθαγόρειο θεώρημα)



$\upsilon_x = \upsilon_0$ (ΕΟΚ)
$\upsilon_y = g \cdot t$

άρα $\upsilon(t) = \sqrt{\upsilon_0^2 + g^2 t^2} =$

$= (\upsilon_0 + g^2 t^2)^{\frac{1}{2}}$

$$a_t = \frac{d\upsilon(t)}{dt} = \frac{d(\upsilon_0 + g^2 t^2)^{\frac{1}{2}}}{dt} = \frac{1}{2}(\upsilon_0^2 + g^2 t^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{d(\upsilon_0^2 + g^2 t^2)}{dt} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\upsilon_0^2 + g^2 t^2}} \cdot 2tg^2 \Rightarrow \boxed{a_t(t) = \frac{g^2 t}{\sqrt{\upsilon_0^2 + g^2 t^2}}}$$

$$a_t(1) = \frac{10^2 \cdot 1}{\sqrt{10^2 + 10^2 \cdot 1}} = \frac{100}{10\sqrt{2}} = 5\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{a_t(1) \simeq 7\ m/s}$$

⊛ $g^2 = a_t^2 + a_r^2 \Rightarrow a_r^2 = g^2 - a_t^2 \Rightarrow a_r = \sqrt{g^2 - a_t^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_r(t) = \sqrt{g^2 - a_t^2(t)}$

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ

(γιατί κινείται έτσι;)

Νόμοι μηχανικής (Newton)

1^{os} Νόμος (Νόμος Αδράνειας της ύλης)

Κάθε σώμα τείνει να διατηρήσει την φυσική του κατάσταση.

$$\Sigma\vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \sigma\tau\alpha\theta$$

2^{os} Νόμος (Θεμελιώδης) *

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{αιτιατό} \\ \text{(αποτέλεσμα)}}}{\vec{a}} = \frac{1}{\underset{\substack{\text{μάζα} \\ \text{(μέτρο αδράνειας σώματος)}}}{m}} \cdot \underset{\text{αιτία}}{\Sigma\vec{F}} \longrightarrow \boxed{\Sigma\vec{F} = m\vec{a}}$$

3^{os} Νόμος (Δράση - Αντίδραση)

$$\vec{F}_{A\to B} = -\vec{F}_{B\to A}$$

Δύναμη ≡ αιτία αλλαγής κινητικής κατάστασης
(ή αιτία παραμόρφωσης)

Ταξινόμηση Δυνάμεων

A) Βαρυτικές (μεταξύ μαζών)
Ηλεκτρομαγνητικές (μεταξύ φορτίων)
Ασθενείς } Πυρηνικές
Ισχυρές } (συστατικά του πυρήνα)

B) ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Από επαφή	Από απόσταση
• Τριβή	• Βαρυτικές
• Τάση νήματος	• Ηλεκτρομαγνητικές
• Δύναμη στήριξης	

(*) Γενικευμένη μορφή 2^{ou} Νόμου Newton

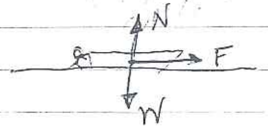
$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad \vec{p} = \text{"κινητική ποσότητα"} = \text{ορμή} = m\cdot\vec{v}$$

$$F = \frac{d(m(t)\cdot v(t))}{dt} = m(t)\cdot\frac{d(v(t))}{dt} + v(t)\cdot\frac{d(m(t))}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = m\vec{a} + \vec{v}\,\frac{dm}{dt}}$$

• Αν $m = \sigma\tau\alpha\theta. \Leftrightarrow \frac{dm}{dt} = 0 \Leftrightarrow \vec{F} = m\vec{a}$

π.χ.



Αρχική μάζα $m_0 = 120$ kg. Γεμίζει με άμμο με ρυθμό $\lambda = 0{,}5$ kg/s. Πόση δύναμη πρέπει να βάλει ο εργάτης ώστε το καρότσι να αποκτήσει σταθερή επιτάχυνση $a = 0{,}1\ m/s^2$;

2^{os} Ν.Ν. $\Sigma F_x = ma + v\dfrac{dm}{dt} \Rightarrow$ σε κάθε χρονική στιγμή t

$$\Rightarrow F = ma + v\frac{dm}{dt} \quad ①$$

• $$\lambda = \frac{dm}{dt} \Rightarrow dm = \lambda dt \Rightarrow \int_{m_0}^{m} dm = \int_0^t \lambda dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [m]_{m_0}^{m} = [\lambda t]_0^t \Rightarrow m - m_0 = \lambda t - 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = m_0 + \lambda t \quad ②$$

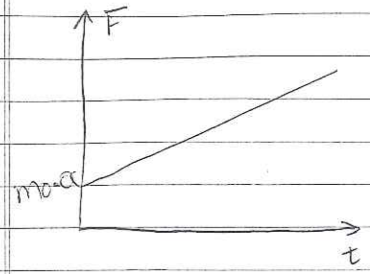
Οπότε $① \overset{②}{\Rightarrow} F = (m_0 + \lambda t)a + v\cdot\lambda \Rightarrow$

$$\Rightarrow F = (m_0 + \lambda t)\cdot a + at\cdot\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = am_0 + \lambda at + \lambda at \Rightarrow$$

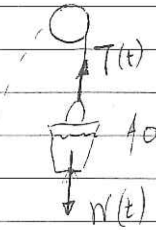
$$\Rightarrow F(t) = 0{,}1\cdot 120 + 0{,}5\cdot 0{,}1\cdot t + 0{,}5\cdot 0{,}1\cdot t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{F(t) = 12 + \frac{t}{10} \quad (SI)}$$



Πρόβλημα

Δοχείο μάζας $M = 2$ kg με νερό μάζας $m_0 = 10$ kg το ανυψώνω με μια τροχαλία ενώ ταυτόχρονα χάνει νερό(*) με (μέσο) ρυθμό $\lambda = 0{,}6$ kg/min. Πόση είναι η τάση του νήματος αν θέλω να ανεβαίνει με επιτάχυνση $a = 0{,}1\ m/s^2$;



2^{os} Ν.Ν. για τον κουβά:

$$\Sigma F_y = m(t)\cdot a_y + v_y \frac{dm}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T - W = ma + v\cdot(-\lambda) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = W + ma - v\cdot\lambda \quad ①$$

$W = W_{κουβά} + W_{νερού} = Mg + m(t)\cdot g \Rightarrow W = (M + m_0 - \lambda t)\cdot g$ ②

$m = m_0 - \lambda t$ ③

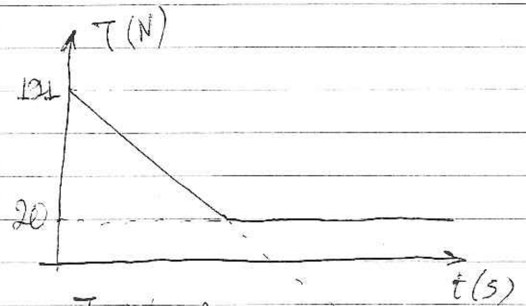
$v = at$ ④

Θεωρώ ότι:
(*) Το νερό βγαίνει από τον κουβά με σχεδόν μηδενική ταχύτητα ως προς το έδαφος
δηλ. $v_{κουβ} \approx -v_{εκροής} \Rightarrow v_{νερ} = 0$.

① $\xrightarrow[④]{②,③}$ $T(t) = (M + m_0 - \lambda t)\cdot g + (m_0 - \lambda t)a - \lambda a t$

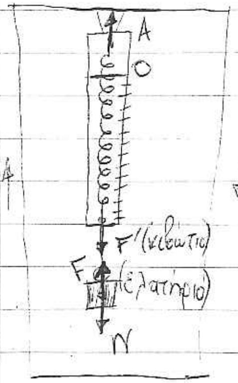
$$\Rightarrow T(t) = [Mg + m_0(a+g)] - (g+2a)\lambda t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{T(t) = 121 - 6{,}12\, t}$$



$T > W_{κουβά} = 20\,N$

Τι δείχνει η ζυγαριά;



1) όταν υ = σταθερή

Στο ελατήριο $\Sigma F = \cancel{m_{ελ}} \cdot a$

$\Rightarrow F' = A$

F' = ένδειξη ζυγαριάς

F = F' (Δράση - Αντίδραση)

↳ και αυτή ένδειξη ζυγαριάς

• Στο κιβώτιο έχω: $\Sigma F_y = m a \xRightarrow{a=0}$

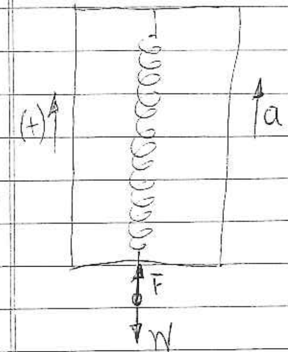
$\Rightarrow F - W = 0 \Rightarrow F = W$

Η ένδειξη της ζυγαριάς είναι το αληθινό βάρος.

2) όταν a↑

π.χ. κατά την εκκίνηση από τον 3° → 5° όροφο (υ↑)

π.χ. κατά την επιβράδυνση πριν σταματήσει (υ↓)

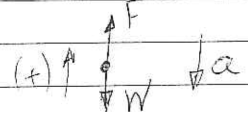


$\Sigma F = ma \Rightarrow F - W = ma \Rightarrow$

$\Rightarrow F = W + ma > W$

άρα ένδειξη > πραγματικό βάρος

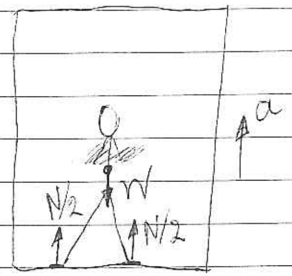
3) όταν a↓ : ένδειξη < πραγματικό βάρος



$\Sigma F = ma \Rightarrow F - W = m(-a) \Rightarrow$

$\Rightarrow F = W - ma < W$

(*) ↳ Γιατί αισθάνομαι βαρύτερος όταν ξεκινά προς τα πάνω ο ανελκυστήρας;



$\Sigma F_y = ma \Rightarrow$

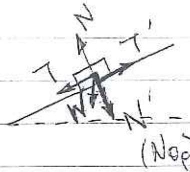
$\Rightarrow N - W = ma \Rightarrow$

$\Rightarrow N = W + ma$

αυτή αισθάνομαι, όχι αυτή

ΕΜΠΕΙΡΙΚΟΙ ΝΟΜΟΙ (για δυνάμεις επαφής)

1) Τριβή ολίσθησης → Οι επιφάνειες ολισθαίνουν η μία ως προς την άλλη.

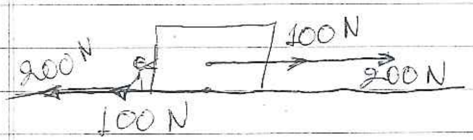


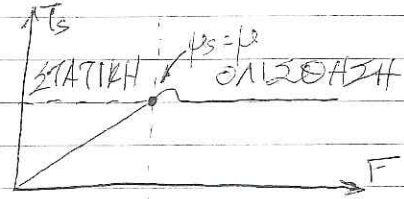
$T = \mu \cdot N$ ← κάθετη δύναμη (στήριξης)

↑ συντελεστής τριβής ολίσθησης

Στατική τριβή → οι επιφάνειες τείνουν να ολισθήσουν

$T_s = \mu_s \cdot N$





π.χ.

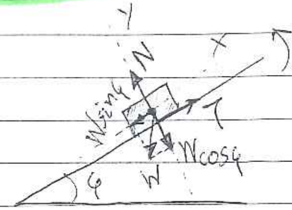
Πόση είναι η μέγιστη επιτάχυνση ώστε να μην πέσει το φορτίο από την καρότσα; (Δίνονται μ, g)

κιβώτιο: $\Sigma F_x = m a_x \Rightarrow T = m a_x$
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = W \Rightarrow T \leq \mu N$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mu \cdot W \geq m a \Rightarrow \mu \cdot m g \geq m a \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{a \leq \mu \cdot g}$

π.χ.



Δίνεται μ

Πόση είναι η μέγιστη φ για να μην γλιστρήσει το κιβώτιο;

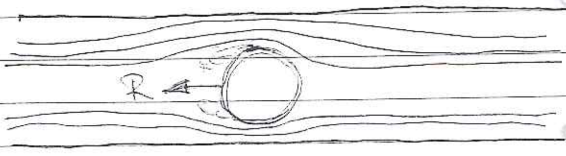
[Απ: μ = tanφ]

$\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ $\Big\} \Rightarrow$ $W\sin\varphi = T$, $W\cos\varphi = N$ $\Big\} \overset{(:)}{\Rightarrow} \dfrac{W\sin\varphi}{W\cos\varphi} = \dfrac{\mu \cdot N}{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mu = \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \Rightarrow \boxed{\mu = \tan\varphi}$

2) Αντίσταση κατά την κίνηση σώματος μέσα σε ρευστό (υγρό, αέρο)

[οπισθέλκουσα δύναμη]



Σώμα πέφτει σε υγρό, όπου $R = -b\upsilon$. Βρείτε την οριακή ταχύτητα.

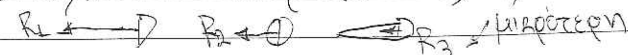
$\boxed{R = \underbrace{a \cdot S \cdot \eta}_{b} \cdot \upsilon}$

υ: ταχύτητα κίνησης στο ρευστό

η: συντελεστής ιξώδους ρευστού (λεπτόρρευστο → μικρό η, παχύρρευστο → μεγάλο η)

S: μετωπική επιφάνεια

α: συντελεστής ουραίου σχήματος

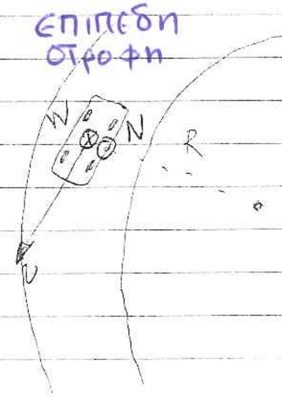


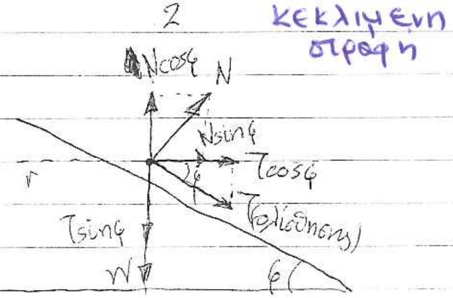
κοινό S, η, υ

Για σφαίρα: $a = \frac{6}{r}$ οπότε $\boxed{R = 6\pi\eta r v}$
(σηγοί)

Για μεγάλες ταχύτητες $R = c v^2$
↓
σταθερά

π.χ. (τριβή)
Βρείτε την v_{max} που πρέπει να έχει το αυτοκίνητο σε στροφή δρόμου με κλίση $\varphi = 15^\circ$ και καμπυλότητα $R = 30\ m$, ώστε να κινηθεί με ασφάλεια (χωρίς ολίσθηση).
Δίνεται $\mu = 0{,}6$





$\Sigma F_t = m \cancel{a_t}^{\,0}$

$\Sigma F_r = m a_r \Rightarrow$

$\Rightarrow N\sin\varphi + T\cos\varphi = m\frac{v^2}{R}$ $\quad\Big\}\Rightarrow$

$\Sigma F_z = m \cancel{a_z}^{\,0} \Rightarrow N\cos\varphi - T\sin\varphi - mg = 0$

$\Rightarrow \begin{array}{l} N\cdot(\sin\varphi + \mu\cos\varphi) = m\frac{v^2}{R} \\ N\cdot(\cos\varphi - \mu\sin\varphi) = mg \end{array} \overset{(:)}{\Longrightarrow}$

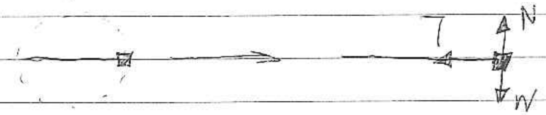
$\Rightarrow \frac{mg}{\cos\varphi - \mu\sin\varphi}(\sin\varphi + \cos\varphi\cdot\mu) = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{v^2 \geq gR\left(\frac{\sin\varphi + \mu\cos\varphi}{\cos\varphi - \mu\sin\varphi}\right)}$

→ $T = \mu\cdot N$
Αν $T > \mu\cdot N$ έχω ολίσθηση
Αν $T < \mu\cdot N$ έχω ασφάλεια
Αν $T = \mu\cdot N$ έχω όριο

$\varphi = 0$: $v^2 = Rg\mu$ (οριζόντια στροφή με τριβή)
$\mu = 0$: $v^2 = Rg\tan\varphi$

Η φυγόκεντρος δεν είναι πραγματική δύναμη



$F_\kappa = T = \frac{mv^2}{R}$

$T = \underbrace{\frac{mv^2}{R}}_{F_{\varphi\upsilon\gamma}} = 0$

Αν $T < \frac{mv^2}{R} \iff F_\kappa < F_{\varphi\upsilon\gamma} = 0$

Ορμή

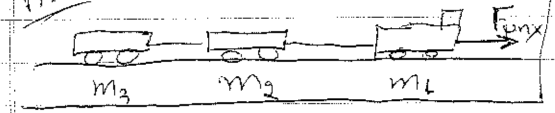
$2^{ος}$ Νόμος Newton $F = \frac{dp}{dt}$

$\vec{p} = m\vec{v}$, ορισμός ορμής σώματος

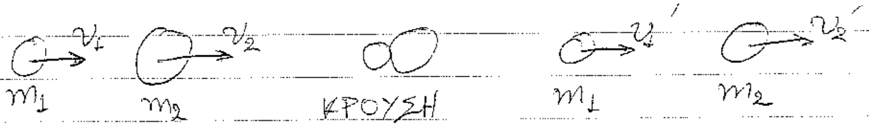
SI $[p] = 1\ kg \cdot m/s$

2ος Ν.Ν. - (Σύστημα Σωμάτων) - Ορμή

π.χ.



π.χ. Δράση ισχυρών δυνάμεων για μικρό χρονικό διάστημα



Σύστημα: $m_1 + m_2$

m_1: $\Sigma F = m_1 a_1 \rightarrow \underset{\text{έξω}}{F_1} + \underset{\text{έσω}}{F_{1,2}} = m_1 a_1 = \frac{dp_1}{dt}$

m_2: $\Sigma F = m_2 a_2 \rightarrow F_2 + F_{2,1} = m_2 a_2 = \frac{dp_2}{dt}$

(+)

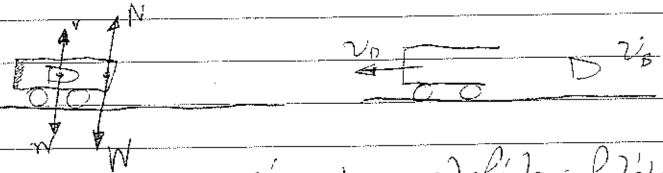
$$\underbrace{F_1 + F_2}_{\Sigma F_{εξ}} + \underbrace{F_{1,2} + F_{2,1}}_{0\ (\text{λόγω } 3^{ου}\ \text{N.N.})} = \frac{dp_1}{dt} + \frac{dp_2}{dt}$$

άρα: $\Sigma F_{εξ} = \frac{d(P_1 + P_2)}{dt}$

$2^{ος}$ ΝΝ: $\boxed{\Sigma F_{εξ} = \frac{dP_{συστ}}{dt}}$ (για σύστημα)

ενδιαφέρον: $\Sigma F_{εξ} = 0 \longleftrightarrow P_{συστ} = σταθ$ (ΘΔΟ)

π.χ. ανάκρουση πολυβόλου



σύστημα = πολυβόλο + βλήμα

$\Sigma F_{εξ,x} = 0 \Rightarrow P_{πριν} = P_{μετά}$

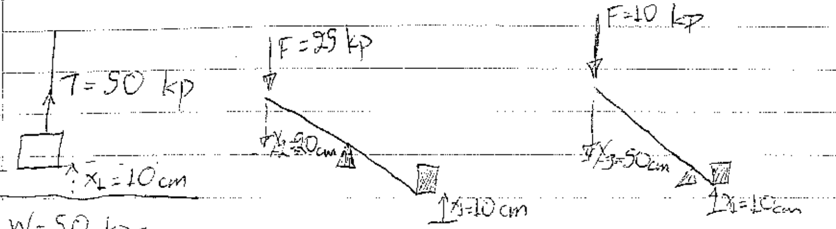
$P_\pi + P_B = P'_\pi + P'_B$

$0 + 0 = M v_\pi + m v_B$

$v_B = -\frac{M}{m} v_\pi$

$|v_B| >> |v_\pi|$ → πολύ μεγαλύτερο

ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ



W = 50 kp = 500 N

($1\ kp \simeq 9{,}81\ N$)

"ποσότητα" (αναλλοίωτη) = δύναμη × μετατόπιση

50 kp × 10 cm = 500 kp·cm

25 kp × 20 cm = 500 kp·cm

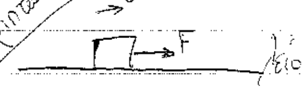
10 kp × 50 cm = 500 kp·cm

Ονομασία της ποσότητας: ΕΡΓΟ ΔΥΝΑΜΗΣ ≡ (ΔΥΝΑΜΗ) × (ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ)

$$W = F \cdot \Delta x$$

(work)

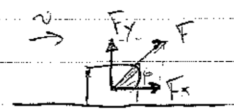
Περιπτώσεις



$W = F \cdot \Delta x > 0$

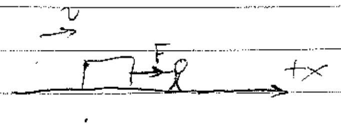
$W = -F \cdot \Delta x < 0$

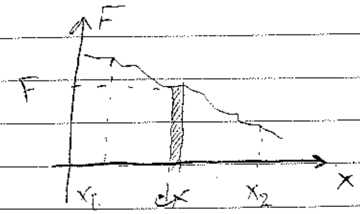
$W = 0$



$$W = W_{F_x} + \underbrace{W_{F_y}}_{0} = F_x \cdot \Delta x = F \cdot \cos\varphi \cdot \Delta x = \vec{F} \cdot \vec{\Delta x}$$

Μεταβλητή δύναμη:





$$dW = F \cdot dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{W_{(x_1 \to x_2)} = \int_{x_1}^{x_2} F\, dx}$$

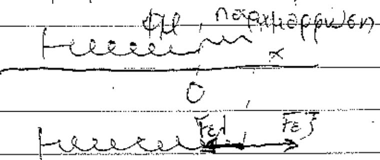
Αν η F είναι μεταβλητού μέτρου και διεύθυνσης:

$$\boxed{W_{(\vec r_1 \to \vec r_2)} = \int_{\vec r_1}^{\vec r_2} \vec F(r)\, d\vec r}$$

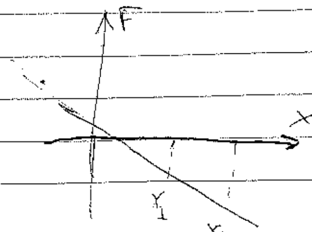
επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

π.χ. Πόσο έργο κάνει η δύναμη ενός ιδανικού ελατηρίου (Hooke) όταν παραμορφώνεται από x_1 σε x_2;

Υπενθύμιση: $F(x) = -k \cdot x$



Ν. Hooke: $F_{ελ}(x) = -k \cdot x$



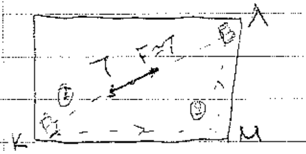
$$W_{ελ}(x_1 \to x_2) = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} (-kx)\,dx = -k\int_{x_1}^{x_2} x\,dx =$$

$$= -k\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{W_{ελ}(x_1 \to x_2) = \frac{1}{2}k x_1^2 - \frac{1}{2}k x_2^2}$$

ΕΡΓΟ ΚΑΙ ΔΙΑΔΡΟΜΗ

1ο



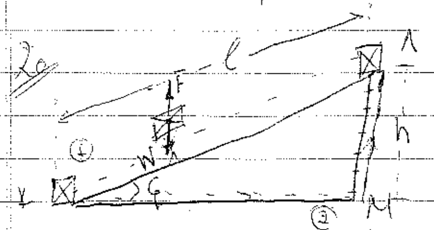
$F = -T$

$W_F = -W_T$

$|W_{T(Κ\to Λ)}^{①}| < |W_{T(Κ\to Λ)}^{②}|$

ΤΟ ΕΡΓΟ ΤΗΣ ΤΡΙΒΗΣ ΕΞΑΡΤΑΤΑΙ ΑΠΟ ΟΛΟΚΛΗΡΗ ΤΗ ΔΙΑΔΡΟΜΗ (όχι μόνο την αρχική και τελική θέση)

2ο



$F = -W$, $W_F = -W_W$

$W_W(Κ \to Λ)^{①} = W \cdot \ell \cdot \sin\varphi$ $\quad W_W(Κ\to Λ)^{②} = W_W(Κ\to Μ) + W(Μ \to Λ) =$
$= 0 + W \cdot h \cdot (-1)$

Τελικά ισχύει ότι $W_W(Κ\to Λ)^{①} = W_W(Κ \to Λ)^{②}$ γιατί $\ell \cdot \sin\varphi = h$

ΤΟ ΕΡΓΟ ΤΟΥ ΒΑΡΟΥΣ <u>ΔΕΝ</u> ΕΞΑΡΤΑΤΑΙ ΑΠΟ ΤΗ ΔΙΑΔΡΟΜΗ

⇒ ΟΙ ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΠΟΥ ΤΟ ΕΡΓΟ ΤΟΥΣ ΔΕΝ ΕΞΑΡΤΑΤΑΙ ΑΠΟ ΤΗ ΔΙΑΔΡΟΜΗ ΛΕΓΟΝΤΑΙ <u>ΣΥΝΤΗΡΗΤΙΚΕΣ</u> (ΣΔ)

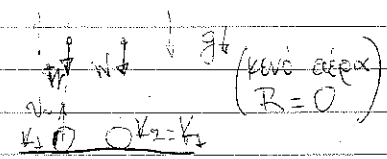
π.χ. :
- βάρος
- άνωση
- οποιαδήποτε F με σταθ. μέτρο κ' κατεύθυνση
- δύναμη Coulomb

αντί π.χ. (όχι ΣΔ):
- $T = \mu N$ τριβή ολίσθησης
- $R = -b\upsilon$ οπισθέλκουσα

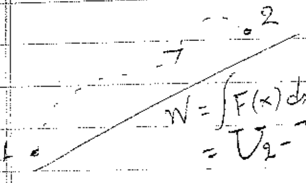
<u>ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ:</u> ΣΔ = ΤΟ ΕΡΓΟ ΣΕ ΟΠΟΙΑΔΗΠΟΤΕ ΚΛΕΙΣΤΗ ΔΙΑΔΡΟΜΗ ΕΙΝΑΙ <u>ΜΗΔΕΝ</u>

Γιατί λέγονται "συντηρητικές";

• Έστω μια κλειστή διαδρομή, τότε $W_F = 0$ (F = ΣΔ). Αλλά $W_F = \Delta K = K_2 - K_1$ άρα $K_2 = K_1$



ΕΡΓΟ ΤΩΝ ΣΔ ΚΑΙ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

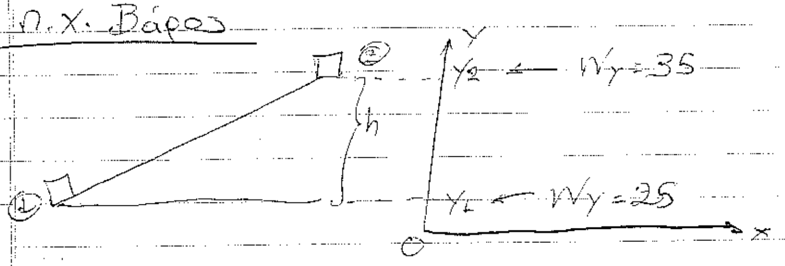


$W = \int F(x)dx = U_2 - U_1$

Έστω F = Σ.Δ. και το σώμα πάει από 1 έως 2

→ Ζητώ μια "ποσότητα" της οποίας η διαφορά των τιμών στην αρχική και τελική θέση να δίνει το έργο. Αυτή η ποσότητα λέγεται δυναμική ενέργεια.

π.χ. Βάρος



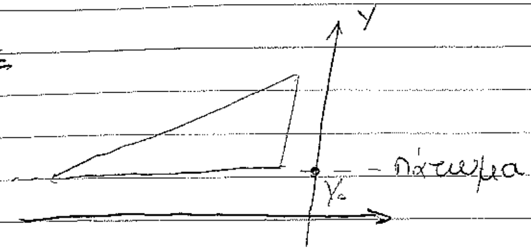
Έχουμε: $W_w(1\to 2) = -W\cdot h = -W(y_2-y_1) = -(W\cdot y_2 - W\cdot y_1) = -(U_2-U_1)$

Ποσότητα $U(y) = W\cdot y$
Δυναμική ενέργεια του βάρους ή βαρυτική δυναμική ενέργεια

• Για να έχει φυσικό νόημα η δυναμική ενέργεια ορίζω το επίπεδο αναφοράς (όπου με βολεύει) και εκεί ορίζω την ΔΕ να είναι ίση με μηδεν

ΔΕ (σε μια θέση) → διαφορά ΔΕ ως προς το επ. αναφοράς

π.χ.



$U(y) = W\cdot y + C$, επίπεδο αναφοράς στο y_0

δηλαδή $U(y_0) = 0 \Rightarrow W y_0 + C = 0 \Rightarrow C = -W\cdot y_0$

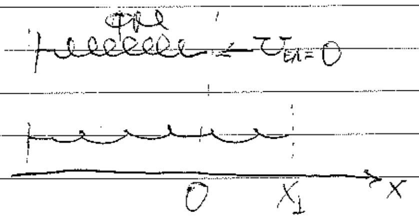
τότε $\boxed{U(y) = W\cdot(y-y_0)}$

π.χ. ιδανικό ελατήριο (Hooke, $F = -k\cdot x$)

$$W(x_1\to x_2) = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx = -k\int_{x_1}^{x_2} x\,dx = -k\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2} =$$

$$= -\left[\frac{1}{2}kx^2\right]_{x_1}^{x_2}$$ άρα $U_{ελ}(x) = \frac{1}{2}kx^2 + C$

$C=0$ Σημ. αναφοράς στην $x=0$ (ΦΜ)



ΘΕΩΡΗΜΑ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Αν δρούν μόνο ΣΔ (π.χ. ελατήριο, ΓΑΤ, ...) τότε δεν παύει να ισχύει ΘΜΚΕ δηλ $W=\Delta K$ αφού F: ΣΔ $\Longrightarrow W_F = -\Delta U$ δηλ $-(U_2-U_1)$

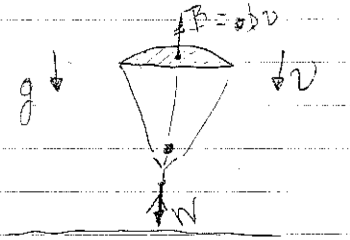
οπότε ΘΜΚΕ: $-(U_2-U_1) = K_2 - K_1 \Rightarrow$

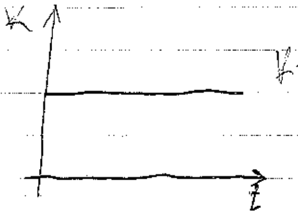
$\Rightarrow \underline{K_1+U_1 = K_2+U_2}$ δηλ η ποσότητα

$K+U =$ σταθ. και λέγεται ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

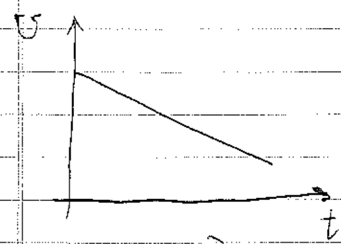
ΘΔΜΕ: $\boxed{\text{Όταν } F = \Sigma.\Delta. \Longleftrightarrow E_{\mu\eta\chi} = \sigma\tau\alpha\theta.}$

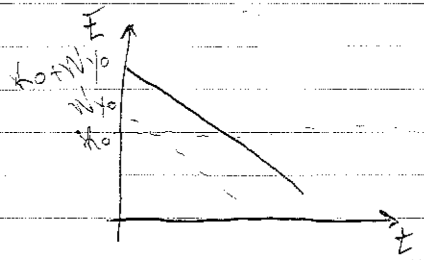
Άσκηση: Αλεξιπτωτιστής κατεβαίνει με σταθερή ταχύτητα υ. Κάντε τα διαγράμματα $K-t$, $U_{\beta\alpha\rho}-t$, $E-t$





$K = \frac{1}{2}m\upsilon^2$ σταθερό





$\left.\begin{array}{l} U = W\cdot y(t) \\ y = -\upsilon t + y_0 \end{array}\right\} U(t) = W y_0 - W\upsilon t$

$E = K+U = \underbrace{\frac{1}{2}m\upsilon^2 + W y_0 - W\upsilon t}$

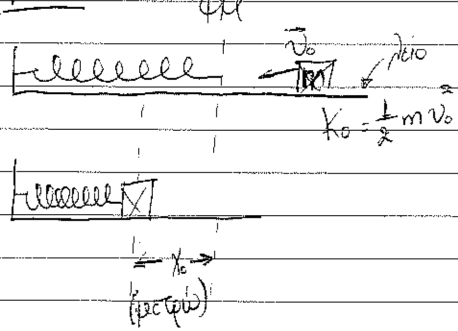
ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΚΑΙ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ

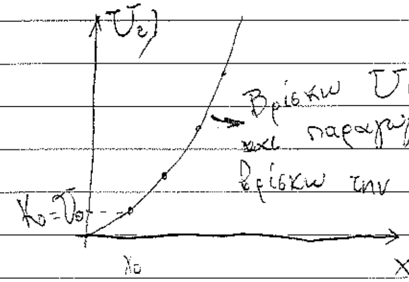
Αν ξέρω τη $U(x)$ πως βρίσκω την $F(x)$;

Απάντηση: έστω F: Σ.Δ., τότε $dW_F = -dU$ αλλά $dW_F = F(x)dx$ οπότε $F(x)dx = -dU \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \boxed{F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}}$$

π.χ.

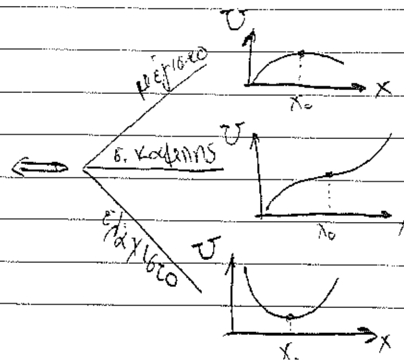




→ Βρίσκω $U(x)$ και παραγωγίζοντας βρίσκω την $F(x)$.

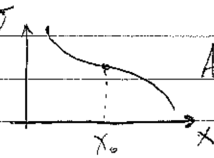
→ Είδη ισορροπίας

Ισορροπία (στη Μηχανική) $\Longleftrightarrow \Sigma F = 0 \xLeftrightarrow[\text{ότι } \nexists \text{ τριβές}]{\text{έστω}} \frac{dU}{dx} = 0 \Longleftrightarrow$



ΑΣΤΑΘΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ

ή



ΑΔΙΑΦΟΡΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ

ΕΥΣΤΑΘΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ

Ασταθής ισορ.: $\dfrac{d^2U}{dx^2} < 0$

Αδιάφορη ισορ: $\dfrac{d^2U}{dx^2} = 0$

Ευσταθής ισορ: $\dfrac{d^2U}{dx^2} > 0$

→ Άρα θέση ισορροπίας: $\left.\dfrac{dU}{dx}\right|_{x_0} = 0$ και είδος από πρόσημο $\dfrac{d^2U}{dx^2}$

π.χ.

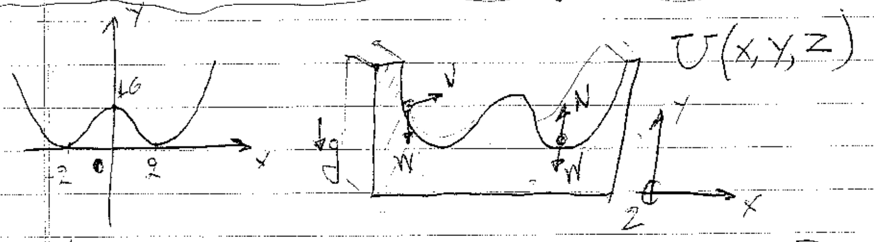
Οριζόντιο λείο αυλάκι έχει εγκάρσια τομή με εξίσωση $y(x) = (x^2-4)^2$

Βρείτε

a) τις θέσεις ισορροπίας σφαίρας $m = 0{,}1\ m$

b) το είδος της ισορροπίας

γ) τις επιτρεπτές περιοχές κίνησης ~~ααα~~ αν η σφαίρα έχει $E = 8\ J$ $(g = 10\ m/s^2)$



Η N δεν κάνει έργο άρα $U = U_{βαρ}$. Ζητώ την $U(x)$.

$U_{βαρ} = mgy = mg(x^2-4)^2 = 0{,}1\cdot 10\,(x^2-4)^2 \iff$

$\iff U(x) = (x^2-4)^2$

a) Θέσεις ισορροπίας: $\dfrac{dU}{dx} = 0 \iff 2(x^2-4)\cdot 2x = 0 \iff$

$\iff \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$ ή $\begin{matrix} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{matrix}$

b) $\dfrac{d^2U}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dU}{dx}\right) = \dfrac{d\left(4x(x^2-4)\right)}{dx} = \dfrac{d\left[4x^3 - 16x\right]}{dx} =$

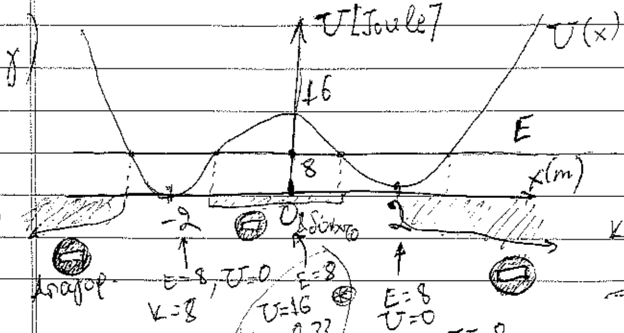
$= 12x^2 - 16$

$\left.\dfrac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=0} = -16 < 0 \rightarrow$ ~~ΑΔΙΑΦΟΡΗ~~ ΑΣΤΑΘΗΣ

$\left.\dfrac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=2} = 36 > 0 \rightarrow$ ΕΥΣΤΑΘΗΣ

$\left.\dfrac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=-2} = 36 > 0 \rightarrow$ ΕΥΣΤΑΘΗΣ

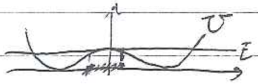
γ)



⊛ $K = \frac{1}{2}m\upsilon^2 \geq 0$ ΠΑΝΤΑ

Η σφαίρα δηλαδή κινείται μόνο εκεί όπου $U < E$!!!

Όρια επιτρεπτών περιοχών: $U(x)=E \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x^2-4)^2=8 \Leftrightarrow x=\sqrt{\pm 2\sqrt{2}+4}$

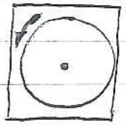
• Η περιοχή 

αποτελεί ενεργειακό φράγμα για το σώμα με $E=8\,J$. (Αν βρεθεί εκεί πρέπει $K<0$ [ΑΔΥΝΑΤΟ])

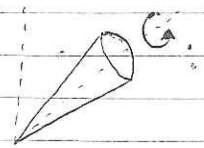
Gamov ~ 1920 Φαινόμενο σήραγγας
(εκεί όπου περνιέται το φράγμα)

ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

Μεταφορά: Όλα τα υλικά σημεία έχουν κοινή $\vec{v}$
Περιστροφική κίνηση: Ένας άξονας του σώματος είναι ακίνητος

π.χ. CD 

Σύνθεση μεταφοράς κ' περιστροφής
π.χ. κύλιση τροχού όταν το αυτοκίνητο κινείται ευθύγραμμα (ο άξονας μεταφέρεται)
π.χ. κύλιση τροχού όταν το αυτοκίνητο στρίβει (ο άξονας μεταφέρεται και περιστρέφεται)
π.χ. σβούρα (ο άξονας μεταπίπτει)



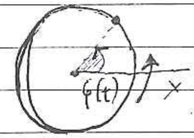
π.χ. ρίψη ενός αντικειμένου: τυχαία κίνηση του άξονα

→ Περιστροφή (γύρω από ακλόνητο άξονα)

1) Χρονική περιγραφή
2) Δυναμική περιγραφή
3) Ενεργειακή περιγραφή

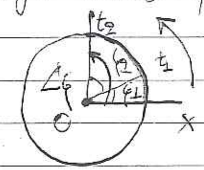
1) Χρονική περιγραφή

α) Θέση και μετατόπιση:
Η θέση περιγράφεται με τη γωνία μια συγκεκριμένη ακτίνα με τον άξονα Ox, δηλ. $\varphi(t)$



SI $[\varphi] = 1\ rad \rightarrow \frac{360}{2\pi}$ ή $\frac{180}{\pi}$ ή $\simeq 57°$

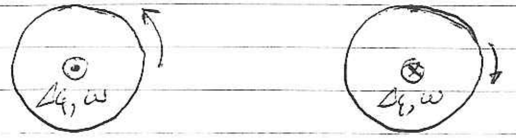
Αλλαγή θέσης = μετατόπιση = $\varphi(t_2)-\varphi(t_1)$



β) Γωνιακή ταχύτητα: $\bar{\omega}=\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ μέση ω

$\boxed{\omega(t)=\frac{d\varphi(t)}{dt}\ \text{στιγμιαία } \omega}$ SI $[\omega]=1\ rad/sec$

$\Delta\vec{\varphi}$ = κάθετο στο επίπεδο περιστροφής



Αν ω = σταθ : $\omega = \bar{\omega} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} \rightarrow \boxed{\omega = 2\pi/T}$ (T = περίοδος)

πλήρης περιστροφή

και $T = \frac{1}{f} \Rightarrow \boxed{\omega = 2\pi f}$

f = συχνότητα = $\frac{\Delta N}{\Delta t}$ $\qquad \omega = 2\pi f$

1 rad/s ⟷ 1 Hz

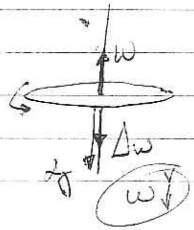
ίδια μονάδα!

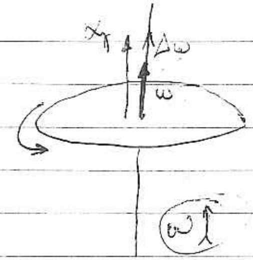
γ) Γωνιακή επιτάχυνση

$\bar{\alpha}_\gamma = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ μέση γων. επιτάχυνση

$\boxed{\alpha_\gamma(t) = \frac{d\omega(t)}{dt}}$ στιγμιαία γων. επιτάχυνση

SI $[\alpha_\gamma] = 1\ \text{rad}/s^2$





Σύνοψη

$$\varphi(t) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \omega(t) \xrightarrow{d/dt} \alpha_\gamma(t)$$

$$\Delta\varphi = \int_{t_1}^{t_2} \omega(t)dt \qquad \Delta\omega = \int_{t_1}^{t_2} \alpha_\gamma(t)dt$$

Άσκηση

Θέση ενός στρεφόμενου δίσκου: $\varphi(t) = 4{,}8t^2 - 0{,}4t^3$ $\quad t>0$

Βρείτε: α) τη στιγμιαία $\omega(t)$ και $\alpha_\gamma(t)$

β) πότε αλλάζει η φορά περιστροφής;

γ) πόση γωνία διέγραψε ως τότε;

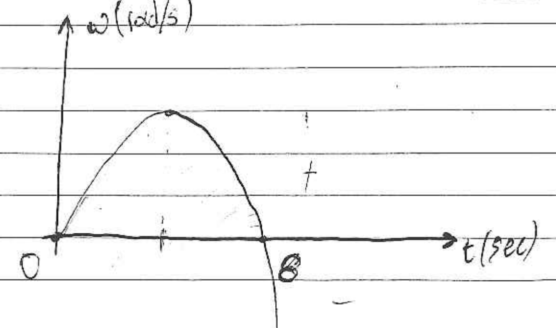
α) $\omega = \frac{d\varphi(t)}{dt} \Rightarrow \boxed{\omega(t) = 9{,}6t - 1{,}2t^2}$

$\alpha_\gamma = \frac{d\omega(t)}{dt} \Rightarrow \boxed{\alpha_\gamma(t) = 9{,}6 - 2{,}4t}$

β) Η φορά αλλάζει όταν η ω αλλάζει πρόσημο οπότε θα εξετάσω πότε $\omega(t) = 0$.

$\omega(t) = 0 \Rightarrow 9{,}6t - 1{,}2t^2 = 0 \Rightarrow 1{,}2t(8-t) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow t = 0$ ή $t = 8$ sec



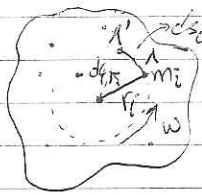
γ) $\Delta\varphi = \varphi(8) - \varphi(0) = 102{,}4 \text{ rad}$

⊛ για να βρω πλήρεις στροφές:

$$N = \frac{102{,}4}{2\pi} = 16{,}30 \quad \text{άρα} \quad \underline{\underline{N = 16}}$$

⊛ $$\Delta\varphi = \int_0^8 \omega(t)\,dt = 102{,}4 \text{ rad}$$

• Περιστροφή σώματος και κυκλική κίνηση των υλικών σημείων



Έστω υλικό σημείο m_i κάνει κυκλική γωνιακή ταχύτητα ω (κοινή για όλα τα υλικά σημεία), γραμμική ταχύτητα v_i, ακτίνα r_i

Έστω ότι σε dt το m_i πηγαίνει από το 1 στο 1'

$\boxed{ds_i = r_i\, d\varphi}$ (τόξο 11'). κοινή για όλα τα υλικά σημεία

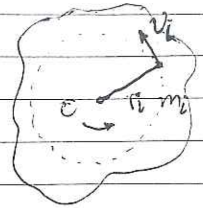
$$\Rightarrow \frac{ds_i}{dt} = r_i \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow \boxed{v_i = r_i \cdot \omega} \text{ και } v_i(t) = r_i\, \omega(t)$$

$$\Rightarrow \frac{dv_i}{dt} = r_i \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \boxed{a_{t,i} = r_i \cdot a_\varphi}$$

επίσης $\boxed{a_{r,i} = \dfrac{v_i^2}{r_i}}$ ή $\boxed{a_{r,i} = \omega^2 r_i}$

2) Δυναμική περιγραφή

Ροπή αδράνειας (ως προς άξονα)



$K_{σώματος} = ;$

Το υλικό σημείο m_i έχει $K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$
$= \frac{1}{2} m_i \omega^2 r_i^2$

$$K_{σώματος} = \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \underbrace{\left(\sum_i m_i r_i^2\right)}_{I} \omega^2$$

άρα $K_{σώματος\ περιστ.} = \frac{1}{2} I \omega^2$, όπου $I = \sum_i m_i r_i^2$

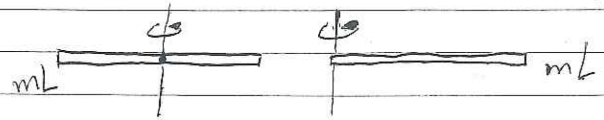
Αντιστοιχία $K_{μετ} = \frac{1}{2} m v^2$

$K_{περ} = \frac{1}{2} I \omega^2$

άρα το I εκφράζει την αδράνεια του σώματος στις αλλαγές του ω

Διαφορά! Το I εξαρτάται από τη θέση του άξονα ή την κατανομή της μάζας γύρω από τον άξονα.

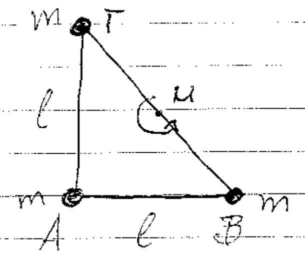
π.χ.



$I_1 \ll I_2$

Υπολογισμός Ροπής Αδράνειας

α) Διακριτά υλικά σημεία



Βρες $I_M = ;;$

Δίνεται: $m_{σφ} >> m_{ράβδου}$

$R_{σφ} << \ell$

λόγω $m_{σφ} >> m_ρ \to m_ρ = 0$

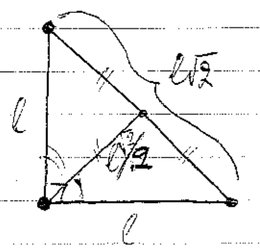
λόγω $R_{σφ} << \ell \to R_{σφ} \simeq 0$

άρα έχω ένα "σύστημα" από 3 υλικά σημεία

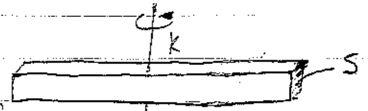
$$I_M = \sum_{i=1}^{3} m_i r_i^2 = m(AM)^2 + m(BM)^2 + m(ΓM)^2 =$$

$$= m\left(\frac{\ell\sqrt{2}}{2}\right)^2 + m\left(\frac{\ell\sqrt{2}}{2}\right)^2 + m\left(\frac{\ell\sqrt{2}}{2}\right)^2 =$$

$$= 3m\left(\frac{\ell^2 \cdot 2}{4}\right) = \frac{3}{2} m\ell^2$$



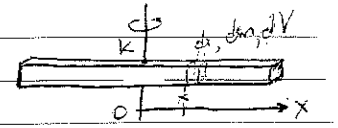
β) Συνεχής κατανομή μάζας



Ράβδος: ομογενής (ρ = σταθ.), σταθ. διατομής (S = σταθ.), μάζα m, μήκος L.

Δείξτε ότι $I_k = \frac{1}{12} mL^2$

$$I_k = \sum_i m_i r_i^2 \to \int r^2 dm$$



Ορίζω άξονα Ox με αρχή στον άξονα περιστροφής. Θεωρώ στοιχειώδη μάζα dm στη θέση x με πάχος dx

Τότε $r^2 = x^2$ και $dm = \rho\, dV = \rho \cdot S \cdot dx$

(ρ, S ανεξ. από x)

Άρα $I_k = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \rho \cdot S\, dx = \rho S \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx =$

$$= \rho S \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{1}{3}\rho S\left(\frac{L^3}{8} + \frac{L^3}{8}\right) = \frac{1}{12}\rho S L^3$$

• $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{SL}$

άρα $I_k = \frac{1}{12}\frac{m}{SL} S L^3 \Rightarrow \boxed{I = \frac{1}{12} m L^2}$

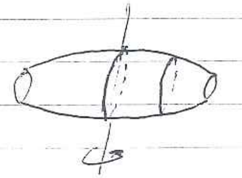
→ Μη ομογενής ράβδος, πχ $\rho(x) = \rho_0 + \lambda\left(x - \frac{L}{2}\right)^2$

ρ_0, λ σταθερές

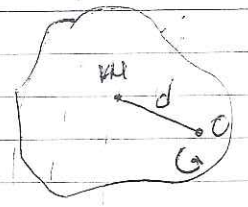
[Απ] $I_k = S \int_{-L/2}^{L/2} \rho(x)\, x^2\, dx$

→ Μη σταθερή διατομή $S(x) = S_0 + \mu\left(x - \frac{L}{2}\right)^2$

$$I = \rho \int_{-L/2}^{L/2} x^2 S(x)\,dx$$

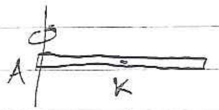


Θεώρημα Steiner (παράλληλων αξόνων)



$$I_o = I_{KM} + md^2$$

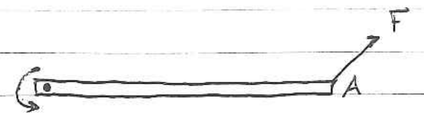
πχ

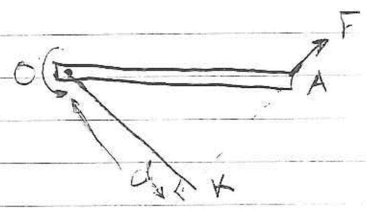


$$I_A = I_K + m(AK)^2 = \frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}mL^2$$

Η ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΗΣ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

Ροπή Δύναμης (ως προς τον άξονα περιστροφής)



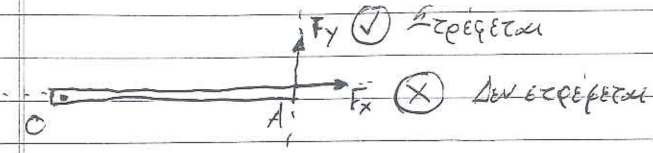


$\tau_F^{(o)} = F \cdot d$

Απόσταση άξονα περιστροφής από το φορέα της $F = (OK)$

(ΜΟΧΛΟΒΡΑΧΙΟΝΑΣ ΤΗΣ F)

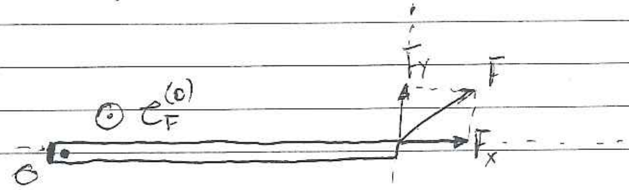
Αν $\tau = F \cdot (OA)$



$F \cdot (OA)$

Η ροπή δύναμης είναι διάνυσμα και είναι κάθετο στον άξονα περιστροφής. Το βρίσκω (την φορά) με κανόνα δεξιού χεριού

Συνέπεια:



F: Συνισταμένη άρα $\tau_F = \tau_{F_x} + \tau_{F_y}$ ⟹ αλλά $\tau_{F_x} = 0$

$\Rightarrow \tau_F^{(o)} = \tau_{F_y}^{(o)} = F_y \cdot (OA)$

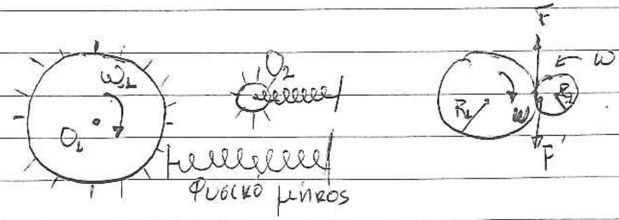
Μονάδες: SI $[\tau] = 1\,N \cdot m$

• ΝΟΜΟΙ ΤΟΥ NEWTON ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ

1ος/ Αν $\Sigma\tau = 0 \Leftrightarrow \omega =$ σταθ.

2ος/ $\Sigma\tau = I \cdot a_\gamma$

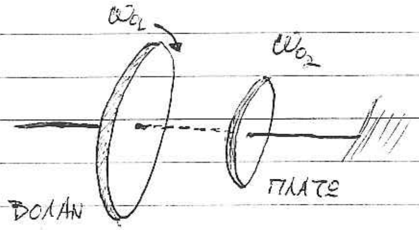
3ος/



$F = F'$ (3ος Νόμος Νεύτωνα)

(Ισχύει?) , Ισχύει ότι $\tau_F^{(O_1)} \neq \tau_{F'}^{(O_2)}$

$\tau_F^{(O_1)} = \tau_{F'}^{(O_1)}$ (χωρίς πρακτική σημασία)



$\tau_{F_1}^{(O)} = \tau_{F_2}^{(O)}$

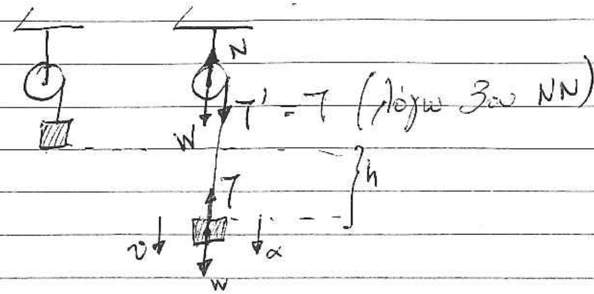
Άσκηση

Τροχαλία: $M = 0{,}5\ kg$, $R = 0{,}2m$
Κιβώτιο: $m = 2\ kg$
Τριβές στον άξονα $\simeq 0$
Νήμα: μη εκτατό (πλήρως ανελαστικό)
Νήμα: δεν γλιστράει πάνω στην τροχαλία

α) επιτάχυνση κιβωτίου $\alpha = ;$
β) επιτάχυνση τροχαλίας $\alpha_\gamma = ;$
γ) Ταχ. κιβωτίου όταν κατέβει $h = 2m$
δ) Στροφές της τροχαλίας ως τότε

Δίνεται $I_K = \frac{1}{2} M R^2$

ακίνητο

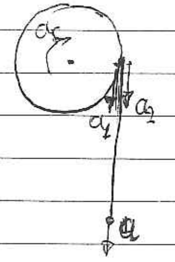


α) ΚΙΒΩΤΙΟ: μεταφορά

2ος Ν.Ν. $\Rightarrow \Sigma F = m\alpha \Rightarrow w - T = m\alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow mg - T = m\alpha$ (1)

ΤΡΟΧΑΛΙΑ: περιστροφή

2ος ΝΝ $\Rightarrow \Sigma\tau = I\alpha_\gamma \Rightarrow T \cdot R = I \cdot \alpha_\gamma \overset{T'=T}{\Rightarrow}$
$\Rightarrow T \cdot R = \frac{1}{2} M R^2 \alpha_\gamma \Rightarrow T = \frac{1}{2} M R \alpha_\gamma$ (2)



$\alpha = \alpha_\gamma \cdot R$
Επειδή δε γλιστράει: $\alpha_\gamma = \alpha_2$
Επειδή είναι μη-εκτατό: $\alpha_1 = \alpha_2$

Άρα $\alpha_1 = \alpha = \alpha_\gamma \cdot R$ (3)

(2) $\Rightarrow T = \frac{1}{2} M R \frac{\alpha}{R} \Rightarrow T = \frac{1}{2} M \alpha$

(1) $\Rightarrow mg - \frac{1}{2} M \alpha = m\alpha \Rightarrow \alpha = \left(\frac{m}{m + \frac{1}{2}M}\right) g$ $< g$

(ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ ΤΟΥ R)

β) $a_\gamma = \dfrac{a}{R} \Rightarrow a_\gamma = \left(\dfrac{m}{m+\frac{M}{2}}\right)\dfrac{g}{R}$

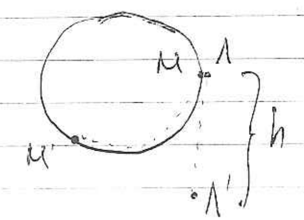
γ) $\left.\begin{aligned} h &= \tfrac{1}{2}at^2 \\ v &= at \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{2ah}}$

δ) 1ος τρόπος: $a_\gamma = σταθ$

$$\left.\begin{aligned} \omega &= a_\gamma \cdot t \\ \varphi &= \tfrac{1}{2}a_\gamma t^2 \\ h = \tfrac{1}{2}at^2 &\Rightarrow t = \sqrt{\tfrac{2h}{a}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi = \frac{1}{2}a_\gamma \frac{2h}{a} \Rightarrow \boxed{\varphi = \frac{h}{R}}$$

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \ldots \simeq 1, \ldots$$

2ος τρόπος:

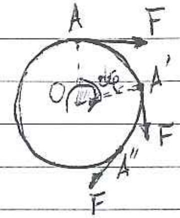


$MM' = ΛΛ' \Rightarrow \varphi \cdot R = h$

ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

$I = \int r^2 dm \quad , \quad K = \frac{1}{2} I \omega^2$

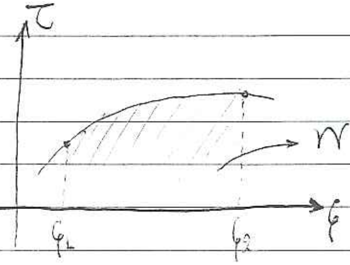
Έργο (ροπής)



$\vec{F}$ = σταθερό μέτρο, διαρκώς εφαπτομενική. Αν ο δίσκος στραφεί κατά $d\varphi$, η δύναμη εκτελεί έργο:

$$W = F \cdot (\overset{\frown}{AA'}) = F \cdot ds = F \cdot R \cdot d\varphi = \tau \cdot d\varphi$$

άρα $\boxed{dW = \tau\, d\varphi}$ και $\boxed{W(\varphi_1 \to \varphi_2) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \tau(\varphi)\, d\varphi}$



Ισχύς (ροπής)

$$P = \frac{dW}{dt} \Rightarrow P = \frac{\tau\, d\varphi}{dt} \Rightarrow \boxed{P(t) = \tau(t) \cdot \omega(t)}$$

στιγμιαία ισχύς

Άσκηση

Κινητήρας αυτοκινήτου αποδίδει ισχύ 200 Hp στις 6000 rpm (στροφές ανά λεπτό). Πόση ροπή αναπτύσσει;
(1 Hp = 746 W)

• $P = \tau\omega \Rightarrow \tau = \frac{P}{\omega}$

$P = 200\ Hp = 200 \times 746 = 149200$ Watt

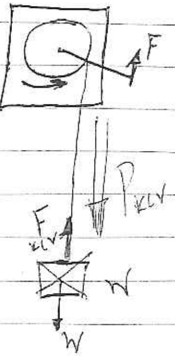
$f = 6000 \frac{rev}{min} = \frac{6000\ rad}{60\ sec} = 100\ Hz$

$\tau = \frac{P}{\omega} \Rightarrow \tau = \frac{P}{2\pi f} \Rightarrow \tau = \frac{149200}{2\pi \cdot 100} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\tau \simeq 237\ Nm}$

Άσκηση

Πόση ροπή πρέπει να αναπτύσσει ώστε να ανυψώνει σώμα βάρους 800 N σε ύψος 2m μέσα σε χρόνο 10 sec όταν εκτελεί 1200 rpm;

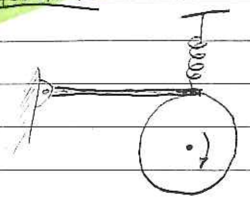


$P_{κιν} = \tau\omega = \tau \cdot 2\pi f \Rightarrow \tau = \frac{P_{κιν}}{2\pi f}$

$P_{κιν} = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{F_{κιν}\cdot h}{\Delta t} \underset{F=σταθ}{\overset{υ=σταθ.}{=}} \frac{W\cdot h}{\Delta t}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\tau = \frac{W\cdot h}{\Delta t \cdot 2\pi f}} \Rightarrow \tau = \frac{800\cdot 2}{10\cdot 2\pi \cdot 1200}$

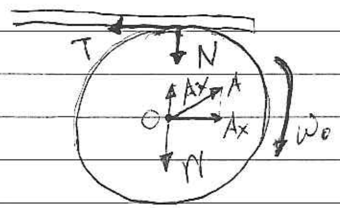
Άσκηση



Δίσκος: $R = 0,3\ m$
$M = 50\ kg$
$f_0 = 900\ rpm$ (αρχική)
Σταματά σε $\Delta t = 10\ sec$
κάθετη δύναμη: $N = 160\ N$

$\mu = ;$ συντελεστής τριβής δίσκου - ράβδου

$I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$



A: από τον άξονα
T: τριβή ολίσθησης
N: κάθετη από τη ράβδο
W: βάρος

Περιστροφή: $\Sigma\tau^{(O)} = I\cdot a_\gamma \Rightarrow T\cdot R = I\cdot a_\gamma \Rightarrow$
$\Rightarrow T = \frac{1}{2}MRa_\gamma$ (1)

$T = \mu\cdot N$ (2)

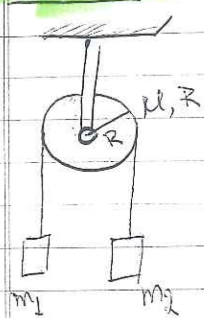
$\omega = \omega_0 - a_\gamma \Delta t$

Άρα: γωνιακή επιβράδυνση $a_\gamma = \frac{\omega_0}{\Delta t} = \frac{2\pi f_0}{\Delta t}$ (3)

(2) $\overset{(1)}{\Rightarrow}$ $\mu\cdot N = \frac{1}{2}MRa_\gamma \Rightarrow \mu = \frac{\frac{1}{2}MRa_\gamma}{N} \overset{(3)}{\Rightarrow} \mu = \frac{\frac{1}{2}MR\frac{2\pi f_0}{\Delta t}}{N}$

$\Rightarrow \boxed{\mu = \frac{\pi\cdot MR\cdot f_0}{\Delta t\cdot N}} \simeq 0,3$

Άσκηση



$M = 1\ kg,\ R = 0{,}2\ m,\ m_1 = 5\ kg,\ m_2 = 7\ kg$

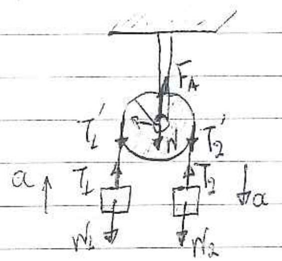
$I = \frac{1}{2} M R^2$

Ποια είναι η ταχύτητα (υ) των σωμάτων όταν απέχουν μεταξύ τους 15 cm;

δεν υπάρχουν τριβές

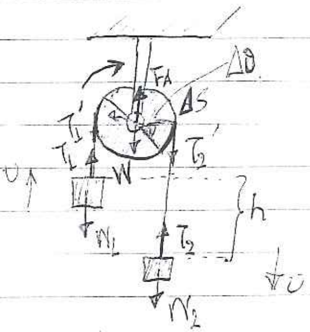
m_1: $T_1 > W_1$ αφού $\alpha > 0$ με φορά προς τα πάνω, οπότε $T_1' = W_1 = m_1 g = 50N$

m_2: $W_2 > T_2$ αφού $\alpha > 0$ με φορά προς τα κάτω, οπότε $T_2' = W_2 = m_2 g = 70\ N$



M: $\Sigma\tau = (T_2' - T_1')R \Rightarrow$
$\Rightarrow \Sigma\tau = 20 \cdot 0{,}2 \Rightarrow \Sigma\tau = 4\ N\cdot m$

ΘΜΚΕ (για τροχαλία)



$W = \Delta K \Rightarrow \Sigma\tau \cdot \Delta\theta = \frac{1}{2} I \omega^2 - 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \Sigma\tau \cdot \frac{\Delta S}{R} = \frac{1}{2} I \omega^2 \Rightarrow$

$\overset{h=\Delta S}{\Rightarrow} \Sigma\tau \frac{h}{R} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} M R^2\right)\omega^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\Sigma\tau \cdot h}{MR} = \frac{1}{4} R^2 \omega^2 \overset{\upsilon = \omega R}{\Rightarrow} \frac{\upsilon^2}{4} = \frac{\Sigma\tau \cdot h}{MR} \Rightarrow$

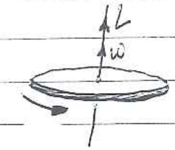
$\Rightarrow \frac{\upsilon}{2} = \sqrt{\frac{\Sigma\tau \cdot h}{MR}} \Rightarrow \upsilon = 2\sqrt{\frac{\Sigma\tau \cdot h}{M \cdot R}} \Rightarrow \boxed{\upsilon = 2\sqrt{3}\ m/s}$

$\alpha = R \cdot \alpha_\gamma$

ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ (G) ή (L)

$L = I \cdot \omega$

ροπή αδράνειας (I) — γωνιακή ταχύτητα (ω)



Γενικά $I = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$

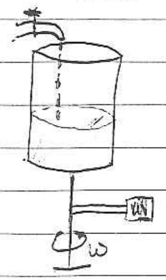
2ος Νόμος Newton και Στροφορμή

$$\boxed{\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$

αν θέλω $L = I\omega$ έχω $\tau = \frac{d}{dt}(I\omega) \Rightarrow \tau = I\frac{d\omega}{dt} + \omega\frac{dI}{dt} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\tau = I \cdot \alpha_\gamma + \omega \cdot \frac{dI}{dt}}$$ → ≠0 όταν $I(t)$ μεταβλητό

ΠΧ



Ρυθμός παροχής $\lambda = 6\ kg/min$
Αρχική μάζα $m_0 = 150\ kg$
Ακτίνα βαρελιού $R = 0{,}9\ m$
Πόση ροπή πρέπει να ασκεί ο κινητήρας ώστε να γυρίζει το βαρέλι με $\omega = 0{,}3\ \frac{1}{s}$
(τριβές $\simeq 0$)
$I_{κυλ} = \frac{1}{2} M R^2$

Για το βαρέλι: $\Sigma\tau = I\alpha_{\gamma} + \omega\frac{dI}{dt} \xRightarrow{\omega=\sigma\tau\alpha\theta} \Sigma\tau = \omega\frac{dI}{dt}$

$I_{(\beta\alpha\rho)} = \frac{1}{2} m(t) R^2$

όπου $m(t) = m_0 + \lambda \cdot t$

Τότε $I(t) = \frac{1}{2}(m_0 + \lambda t) R^2$

και $\frac{dI}{dt} = \frac{1}{2}\lambda R^2$

οπότε $\boxed{\Sigma\tau = \frac{1}{2}\omega\lambda R^2}$

$\tau_{ΚΙΝΗΤΗΡΑ}$

Σύστημα σωμάτων και Στροφορμή

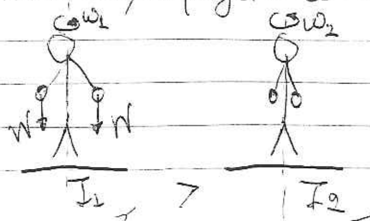
Θυμάμαι $\Sigma F_{\varepsilon\xi} = 0 \Leftrightarrow P_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = \sigma\tau\alpha\theta$ (Θεώρημα διατήρησης της ορμής)

Περιστροφική κίνηση: $\boxed{\Sigma\vec{\tau}_{\varepsilon\xi} = 0 \Leftrightarrow \vec{L}_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = \sigma\tau\alpha\theta}$

όπου $\vec{L}_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = \underbrace{\vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 + \dots + \vec{L}_N}_{N \text{ σώματα στο σύστημα}}$

π.χ.

Γιατί κουλουριάζει το κορμί του ο αθλητής καταδύσεων;



$\rightarrow L_1 = L_2$

$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$

$\omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_1 > \omega_1$

$\Rightarrow \omega_2 > \omega_1$ πετυχαίνει πιο πολλές στροφές ανά λεπτό

Επίσης: $\frac{K_2}{K_1} = \frac{\frac{1}{2}I_2\omega_2^2}{\frac{1}{2}I_1\omega_1^2} = \underbrace{\frac{I_2}{I_1}}_{<1}\underbrace{\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2}_{>1}$ ①

$K = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{I^2\omega^2}{I} = \frac{1}{2}\frac{L^2}{I}$ ②

① $\xRightarrow{②} \frac{K_2}{K_1} = \frac{L_2^2/2I_2}{L_1^2/2I_1} = \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2\frac{2I_1}{2I_2} = \frac{I_1}{I_2} > 1$

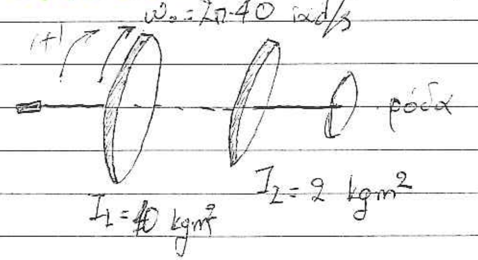
$L = \sigma\tau\alpha\theta$ άρα είναι ίσο με 1

$\Downarrow$

$K_2 > K_1$

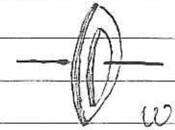
κατανάλωσε $E_{χημ}$

• Συμπλοκή Δίσκων (αρχή λειτουργίας συμπλέκτη)



α) Πόση γωνιακή ταχύτητα αποκτούν μετά τη συμπλοκή

β) Πόση θερμότητα εκλύθηκε;



α) $L_{\alpha\rho\chi} = L_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow$

$\Rightarrow L_1 + L_2 = L_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow$

$\Rightarrow I_1 \cdot \omega_0 + 0 = (I_1 + I_2)\omega \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\omega = \omega_0\frac{I_1}{I_1 + I_2}}$

β) $Q = K_{\alpha\rho\chi} - K_{\tau\varepsilon\lambda}$

γ) Αν η συμπλοκή είχε διάρκεια $\Delta t = 0,2$ sec, πόση ροπή δέχτηκε κάθε δίσκος;

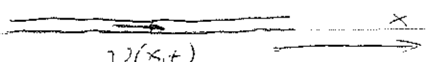
ΡΕΥΣΤΑ

1) Κινηματική

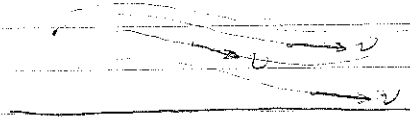
Θέση
ταχύτητα $\vec{v}(\vec{r}, t)$
επιτάχυνση $\vec{a}(\vec{r}, t)$

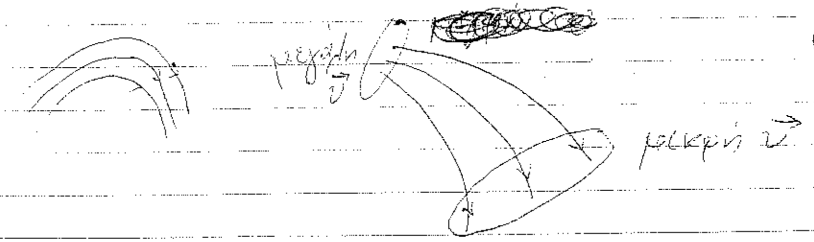
$v(x,t)$

$\boxed{\text{Πεδίο ταχυτήτων}}$



Σωλήνας ροής
ρευματικές γραμμές





μεγάλη $\vec{v}$

μικρή $\vec{v}$

2) Δυναμική

Νόμοι Newton → εξισώσεις Navier-Stokes
$F = ma$

⇓

επίλυση
$\vec{v}(\vec{r}, t)$

$m\frac{dv}{dt} = F(x, v, t)$
$F(x, v(x,t), t)$

3) Ενεργειακή

ΘΜΚΕ → Νόμος Bernoulli

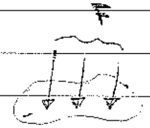
• (Βασικές έννοιες)

Ρευστά (υγρά και αέρια)

Ιδανικά
- Ασυμπίεστα (ρ = σταθ.)
- Χωρίς τριβές
  - α) με τοιχώματα → Ιξώδες = 0
  - β) μεταξύ στρωμάτων διαφορετικής ταχύτητας

Πραγματικά
- Συμπιεστά
- Ιξώδες $\neq 0$

Πίεση (P, pressure)

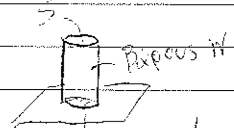


$P = \frac{\text{δύναμη (κάθετη στην επιφάνεια)}}{\text{εμβαδό επιφάνειας}} \Longrightarrow$

$\Rightarrow \boxed{P = \frac{F}{S}}$

SI $[P] = 1\ N/m^2 = 1\ Pa$ (Pascal)

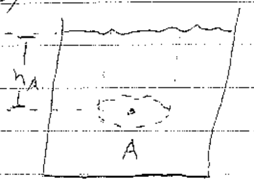
$1\ Atm \approx 10^5\ Pa$



Βάρος W

$P = \frac{W}{S}$

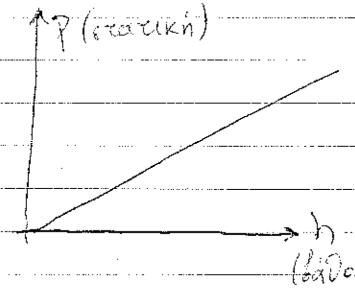
(Υδρο) Στατική Πίεση
(Αερο)

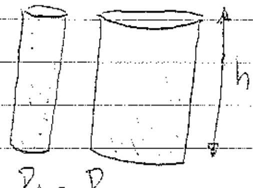


Στο A η πίεση από το ρευστό είναι:

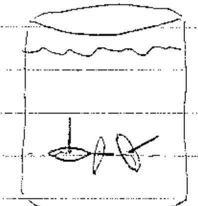
$$P_A = \frac{W}{S} = \frac{mg}{S} = \frac{\rho \cdot V \cdot g}{S} =$$

$$= \frac{\rho \cdot S \cdot h_A \cdot g}{S} \Longrightarrow \boxed{P_A = \rho \cdot g \cdot h_A}$$





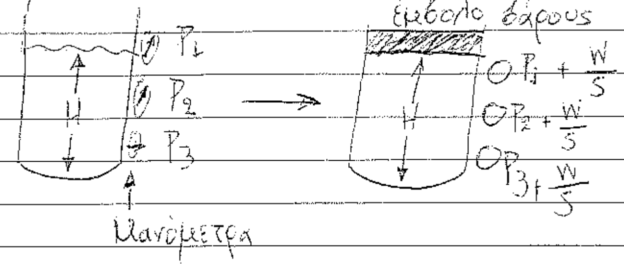
$P_A = P_B$
γιατί P ανεξάρτητο από S.



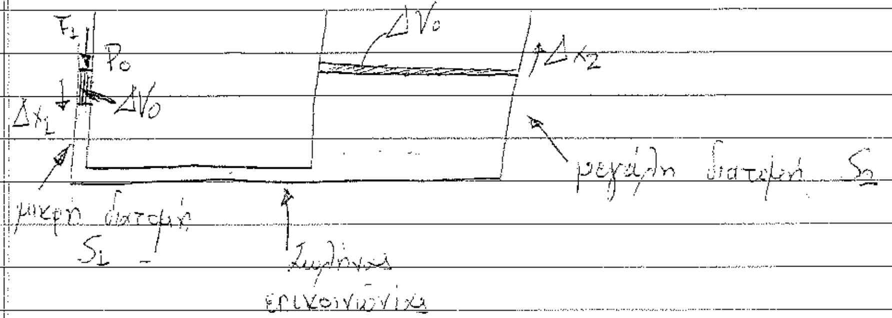
Το P δεν εξαρτάται από το που στρέφεται η επιφάνεια.

Αρχή Pascal

"Η εξωτερική πίεση που ασκείται σε ένα (ασυμπίεστο) ρευστό μεταδίδεται αμετάβλητη σε κάθε σημείο του".



Εφαρμογή: Υδραυλικό πιεστήριο



Ασκώ αριστερά πίεση $P_0 = \frac{F_1}{S_1}$. Αρχή Pascal: Η P_0 μεταδίδεται στο δεξιό έμβολο αμετάβλητη. Άρα

$$P_0 = \frac{F_2}{S_2} \Rightarrow \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \Rightarrow F_2 = \underbrace{\frac{S_2}{S_1}}_{>1} \cdot F_1$$

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ
ΔΥΝΑΜΗΣ

Ο όγκος ΔV_0 "μεταφέρεται" δεξιά

$$S_1 \cdot \Delta x_1 = S_2 \, \Delta x_2 \Rightarrow \boxed{\Delta x_2 = \frac{S_1}{S_2} \Delta x_1}$$

"Βάζω" έργο $W_1 = F_1 \cdot \Delta x_1$

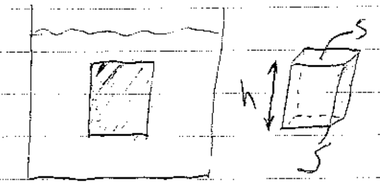
"Παίρνω" έργο $W_2 = F_2 \cdot \Delta x_2$

$$\underline{W_2} = F_2 \, \Delta x_2 = \frac{S_2}{S_1} F_1 \cdot \frac{S_1}{S_2} \Delta x_1 = F_1 \cdot \Delta x_1 =$$

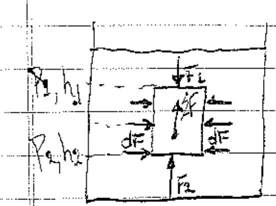
$$= \underline{W_1} \quad \text{άρα} \quad \boxed{W_2 = W_1}$$

Αρχή του Αρχιμήδη - Άνωση

Στερεό σώμα μέσα σε ρευστό



Πόση δύναμη ασκείται από το ρευστό στο σώμα;



$$dF = P \cdot dS \Rightarrow dF = \rho g h \, dS$$

$$\Sigma F_{πλευρική} = 0 \Rightarrow \Sigma F = \Sigma F_y = F_2 - F_1 =$$
$$= P_2 S - P_1 S = \rho g h_2 S - \rho g h_1 S =$$
$$= \rho \cdot g (h_2 - h_1) \cdot S = \rho \cdot g \cdot \underbrace{h \, S}_{V} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\Sigma F_y = \rho_{υγρ} \cdot g \cdot V_{βυθ}}$$

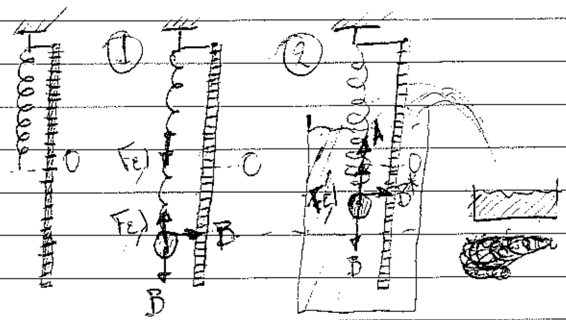
ΣF_y: κατακόρυφη προς τα πάνω [(ΑΝΩΣΗ) Α]

$V_{βυθ}$: ο βυθισμένος όγκος

Πείραμα Αρχιμήδη: Πόσο βάρος "χάνει" ένα σώμα αν το βυθίσω σε νερό;

$$\rho_{νερού} = 1 \frac{gr}{cm^3} = 1 \frac{kg}{\ell} = 1000 \frac{kg}{m^3}$$

CGS — SI



Νερό που εκτοπίστηκε

Βάρος b

Δείξτε ότι: $b = B - B^*$

Αρχή Αρχιμήδη: "Χάνει" βάρος ίσο με το βάρος του νερού που εκτοπίστηκε

Στην ① $F_{ελ} = B$

Πάντα αυτή δείχνει η ζυγαριά

Στην ② $F'_{ελ} + A = B \Rightarrow F'_{ελ} = B - A$

(Θέλω $F'_{ελ} = B - b$)

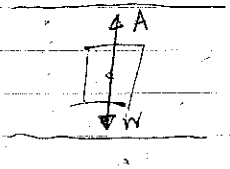
αυτή είναι η ένδειξη για το B^*

Θα δείξω ότι $A = B$ (νερού που εκτοπίστηκε)

$A = \rho_{υγρ} \cdot g \cdot V_{βυθ}$, αλλά $V_{βυθ} = V_{νερού}$ (που εκτοπίστηκε)

άρα $\boxed{A = \rho_{υγρ} \cdot g \cdot V_{υγρ} = B \text{ (νερού που εκτοπίστηκε)}}$

Συνθήκη πλεύσης και βύθισης



Σώμα μέσα σε νερό (εξολοκλήρου). Αν: $A = W$ ισορροπεί οπουδήποτε

$$\Rightarrow \rho_{υγρ} \cdot g \cdot V = \underbrace{\rho_{σωμ} \cdot V}_{m_{σωμ}} \cdot g$$

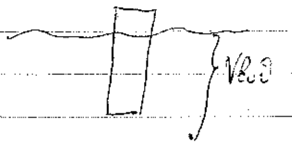
$$\Rightarrow \rho_{υγρ} = \rho_{σωμ}$$

- Αν $A < W$ τότε $\rho_{υγρ} \cdot V \cdot g < \rho_{σωμ} V \cdot g \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho_{υγρ} < \rho_{σωμ}$ Βυθίζεται

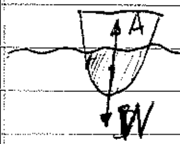
- Αν $A > W$ τότε $\rho_{υγρ} > \rho_{σωμ}$

Ανεβαίνει προς την επιφάνεια



Καθώς αναδύεται $V_{βυθ} \downarrow \Rightarrow A \downarrow$ και όταν γίνει $A' = W$ ισορροπεί.

Πλεύση

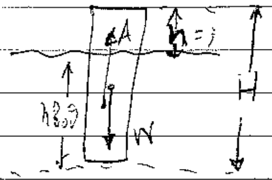


"ίσαλος γραμμή"

Άσκηση

Ξύλινος κύλινδρος $H = 10$ cm. Πόσο τμήμα του είναι έξω από το νερό όταν επιπλέει κατακόρυφα;

$\rho_ξ = 0,7$ gr/cc , $\rho_{νερού} = 1$ gr/cc.



Ισορροπεί: $\Sigma F = 0 \Rightarrow W = A \Rightarrow$

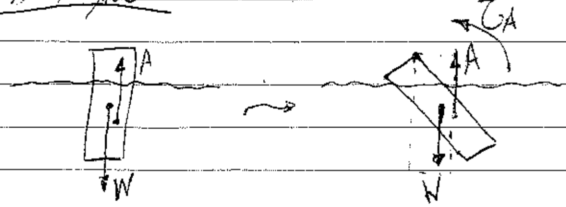
$\Rightarrow \rho_ξ \cdot V \cdot g = \rho_{νερού} V_{βυθ} \cdot g \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{βυθ} = \frac{\rho_ξ}{\rho_{νερού}} \cdot V = 0,7\, V \Rightarrow$

$\Rightarrow S \cdot h_{βυθ} = 0,7 \cdot S \cdot H \Rightarrow \boxed{h_{βυθ} = 0,7 \cdot H}$

άρα $h = 0,3 \cdot H$

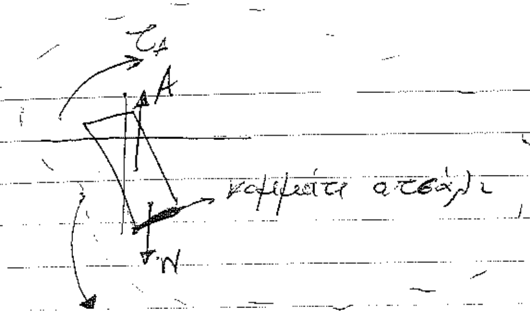
Σχόλιο



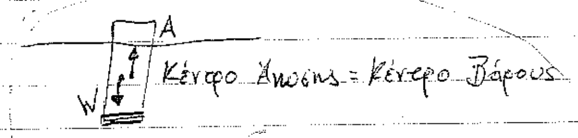
$A = W$

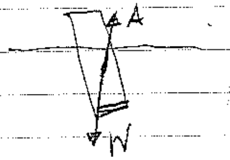
$A = W \rightarrow$ όχι μεταφορά

Αισταθής πλεύση: Το κέντρο Άνωσης είναι πιο χαμηλά από το κέντρο βάρους



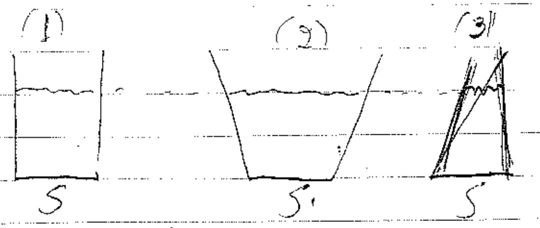
<u>Ευσταθής Πλεύση</u>: Πρέπει το κέντρο Άνωσης να είναι πιο ψηλά από το κέντρο βάρους.





<u>Αδιάφορη Πλεύση</u>

<u>Άσκηση</u>



κοινά S, H, ρ

Συγκρίνετε: α) τις $F_{\text{πυθμένα}}$ (F_1, F_2, F_3)
β) τα βάρη του νερού που περιέχεται (B_1, B_2, B_3)