

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ**  
**ΟΡΜΗΣ – ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΚΑΙ ΕΡΓΟΥ**

**ΑΣΚΗΣΗ 1**

Η δύναμη ανά μονάδα επιφανείας που απαιτείται για να σπάσει το κόκαλο της κνήμης (το καλάμι του ποδιού) στο κατώτερο σημείο του ποδιού είναι περίπου  $T=(F/A)=1,6 \times 10^8 \text{ N/m}^2$ . Η ελάχιστη ενεργός διατομή του οστού της κνήμης είναι περίπου  $A_{\min}=3,2 \text{ cm}^2$  και βρίσκεται λίγο πιο πάνω από τον αστράγαλο. Υποθέστε ότι ένας αθλητής που έχει μάζα  $m=60 \text{ kg}$  πηδά στο έδαφος από ένα ύψος  $h_0=2,0 \text{ m}$  και απορροφά τον κραδασμό της πρόσκρουσης με το έδαφος κάμπτοντας τα γόνατά του. Υποθέστε ότι η επιβράδυνση κατά τη διάρκεια της πρόσκρουσης με το έδαφος είναι σταθερή. Κατά τη διάρκεια της πρόσκρουσης στο έδαφος, ο αθλητής χαμηλώνει το κέντρο μάζας του κατά  $\Delta d = -1,0 \text{ cm}$ . Να υπολογίσετε:

- A) Το χρονικό διάστημα  $\Delta t$  που διαρκεί η κρούση του αθλητή με το έδαφος.
- B) Τη μέση δύναμη που ασκεί το έδαφος στα πόδια του αθλητή κατά τη διάρκεια της πρόσκρουσης στο έδαφος.
- Γ) Το λόγο της μέσης δύναμης που ασκεί το έδαφος πάνω στα πόδια του αθλητή προς το βάρος του αθλητή. Μπορούμε φαινομενικά να αγνοήσουμε το βάρος του αθλητή κατά την πρόσκρουσή του στο έδαφος..
- Δ) Θα σπάσει το κόκαλο της κνήμης του αθλητή;

**ΛΥΣΗ**

- A) Στην ελεύθερη πτώση του αθλητή από ύψος  $\Delta y_1=h=2.0\text{m}$  το έργο του βάρους  $W_g$  του αθλητή είναι θετικό (επειδή η φορά κίνησης και η φορά του βάρους είναι ίδιες), οπότε από το θεώρημα Έργου – Κινητικής Ενέργειας θα έχουμε:

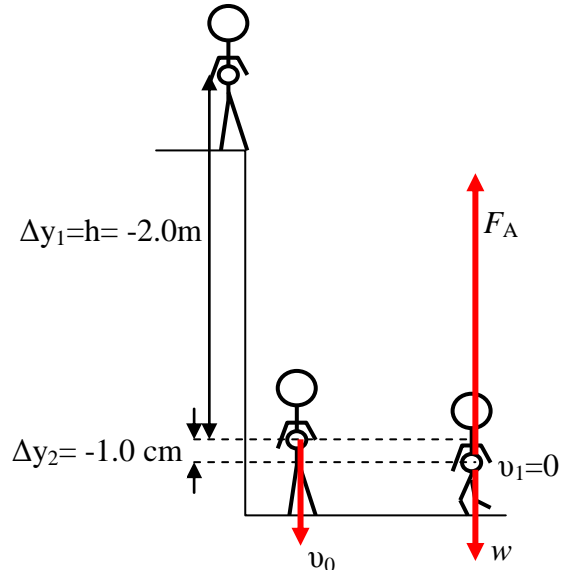
$$W_g = \Delta K \Rightarrow mg\Delta y_1 = \frac{1}{2}mv_0^2 - 0 \Rightarrow$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv_0^2 \Rightarrow v_0 = -\sqrt{2gh} \quad (1.1)$$

( $g < 0$  και  $h < 0$ , οπότε  $gh > 0$ )

Στο διάστημα  $\Delta y_2$ , η ταχύτητα του αθλητή από  $v_0$  γίνεται  $v_1=0$  σε χρονικό διάστημα  $\Delta t_{\text{coll}}$  που είναι ίσο με τη χρονική διάρκεια της πρόσκρουσης στο έδαφος. Στο διάστημα αυτό μια θετική δύναμη  $F$  (αντίθετη της κίνησης και κατά προσέγγιση σταθερή) επιβραδύνει τη κίνηση με θετική επιτάχυνση  $a=F/m$ . Στο ίδιο διάστημα το έργο της δύναμης  $F$  είναι αρνητικό επειδή η διεύθυνση της δύναμης  $F$  (είναι προς τα πάνω) είναι αντίθετη της φοράς της κίνησης που είναι προς τα κάτω.

$$W_F = \Delta K \Rightarrow F\Delta y_2 = 0 - \frac{1}{2}mv_0^2 \Rightarrow F = -\frac{mv_0^2}{2\Delta y_2} \quad (1.2)$$



Στο ίδιο διάστημα η θετική δύναμη  $F$  προκαλεί μια ώθηση  $J(\Delta t_{coll})$  πάνω στον αθλητή η οποία μεταβάλλει την ορμή από  $p_0=mv_0$  σε  $p_1=0$ . Οπότε, από το θεώρημα Ώθησης – Ορμής έχουμε:

$$J(\Delta t_{coll}) = \Delta p \Rightarrow F \Delta t_{coll} = p_1 - p_0 \Rightarrow F \Delta t_{coll} = -mv_0 \Rightarrow \Delta t_{coll} = -\frac{mv_0}{F}$$

Αντικαθιστώντας τη δύναμη  $F$  από τη Σχέση (5.2) θα έχουμε τελικά:

$$\Delta t_{coll} = -\frac{mv_0}{-\frac{m v_0^2}{2\Delta y_2}} \Rightarrow \Delta t_{coll} = \frac{2\Delta y_2}{v_0} = \frac{2\Delta y_2}{-\sqrt{2gh}} = \frac{2 \times (-0,010m)}{-\sqrt{2 \times (9,80m/s) \times (2,0m)}} \Rightarrow$$

$$\Delta t_{coll} = 3,2 \times 10^{-3} s$$

- B) Η δύναμη  $F$  που προσδιορίστηκε με τη Σχέση (1.2) είναι ίση με τη συνολική δύναμη που ασκείται πάνω στον αθλητή κατά την πρόσκρουσή του στο έδαφος. Η δύναμη αυτή είναι ίση με τη ζητούμενη δύναμη  $F_A$  που ασκεί το έδαφος πάνω στον αθλητή μείον το βάρος του αθλητή (βλέπε Σχήμα):

$$F \Delta t_{coll} = -mv_0 \Rightarrow (F_A - w) \Delta t_{coll} = -mv_0 \Rightarrow F_A = w - \frac{mv_0}{\Delta t_{coll}} \Rightarrow$$

$$F_A = mg - \frac{mv_0}{\frac{2\Delta y_2}{v_0}} = mg - \frac{mv_0^2}{2\Delta y_2} = mg - \frac{m2gh}{2\Delta y_2} = mg \left( 1 - \frac{h}{\Delta y_2} \right) = (60kg) \times (9,80m/s^2) \left( 1 - \frac{2,0m}{2 \times (-0,01m)} \right)$$

$$F_A = 1,2 \times 10^5 N$$

- Γ) Παρατηρούμε ότι το πηλίκο:  $\frac{F_A}{w} = \frac{F_A}{mg} = \frac{1,2 \times 10^5 N}{(60kg) \times (9,80m/s^2)} \approx 200$

Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να αγνοήσουμε το βάρος του αθλητή για τον υπολογισμό της μέσης δύναμης που ασκεί το έδαφος στον αθλητή.

- Δ) Αφού η ελάχιστη ενεργός διατομή της κνήμης του ποδιού είναι  $A_{min}=3,2cm^2=3,2 \times 10^{-4}m^2$ , η τάση που ασκείται πάνω στο κόκαλο αυτό θα είναι:

$$T = \frac{F_A}{A_{min}} = \frac{1,2 \times 10^5 N}{3,2 \times 10^{-4} m^2} \Rightarrow T = 3,8 \times 10^8 N/m^2$$

Δεδομένου τώρα ότι η κνήμη αντέχει σε τάσεις που είναι μικρότερες της τάσης  $1,6 \times 10^8 N/m^2$ , ο αθλητής θα σπάσει το πόδι του κατά την πτώση του από το ύψος το 2,0 m.

## ΑΣΚΗΣΗ 2

Μια μπάλα μάζα  $m=0,500kg$  βρίσκεται σε κατάσταση ηρεμίας σε ύψος  $h_0=2,00 m$  από το έδαφος από όπου και αφήνεται ελεύθερη να πέσει προς τα κάτω. Μετά την πρόσκρουση της μπάλας στο έδαφος, αυτή αναπηδά μέχρι σε ένα ύψος  $h_f=1,20 m$ . Η κρούση της μπάλας με το έδαφος διαρκεί χρονικό διάστημα  $\Delta t_c=0,0200s$  Να υπολογίσετε:

- A) Την ορμή  $p_2$  της μπάλας ακριβώς πριν αυτή κτυπήσει στο έδαφος.

- B) Την ορμή  $p_3$  της μπάλας ακριβώς αμέσως μετά την κρούση της με το έδαφος.

- Γ) Τη μέση δύναμη  $F$  που ασκεί το έδαφος πάνω στη μπάλα.  
 Δ) Την ώθηση που υφίσταται η μπάλα κατά τη διάρκεια της κρούσης.  
 Ε) Τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας κατά τη διάρκεια της κρούσης.

### ΛΥΣΗ

- A) Αρχή διατήρησης μηχανικής ενέργειας κατά την πτώση της μπάλας από το ύψος  $h_0$ :

Μηχανική ενέργεια στο ύψος  $h_0$  ίση με τη μηχανική ενέργεια στο έδαφος. Ισοδύναμα, δυναμική ενέργεια στο ύψος  $h_0$  ίση με κινητική ενέργεια στο έδαφος:

$$U(h_0) = K(y=0) \Rightarrow mgh_0 = \frac{1}{2}mv_2^2 \Rightarrow$$

$$v_2 = -\sqrt{2gh_0} = -\sqrt{2 \times (9,80 \text{ m/s}^2) \times (2,00 \text{ m})} \Rightarrow$$

$$v_2 = -6,26 \text{ m/s}$$

Το αρνητικό πρόσημο προέκυψε από το γεγονός ότι η μπάλα κινείται προς τα κάτω. Η αντίστοιχη ορμή  $p_2$  της μπάλας θα είναι ίση με:

$$p_2 = mv_2 = (0,500 \text{ kg}) \times (-6,26 \text{ m/s}) \Rightarrow p_2 = -3,13 \text{ kgm/s}$$

- B) Αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας κατά την άνοδο της μπάλας στο ύψος  $h_f$ :

Μηχανική ενέργεια στο έδαφος ίση με μηχανική ενέργεια στο ύψος  $h_f$ . Ισοδύναμα, κινητική ενέργεια στο έδαφος ίση με δυναμική ενέργεια:

$$K(y=0) = U(h_f) \Rightarrow \frac{1}{2}mv_3^2 = mgh_f \Rightarrow v_3 = \sqrt{2gh_f} = \sqrt{2 \times (9,80 \text{ m/s}^2) \times (1,20 \text{ m})} \Rightarrow$$

$$v_3 = 4,85 \text{ m/s}$$

Η αντίστοιχη ορμή  $p_3$  θα είναι ίση με:

$$p_3 = mv_3 = (0,50 \text{ kg}) \times (4,85 \text{ m/s}) \Rightarrow p_3 = 2,42 \text{ kgm/s}$$

- Γ) Θεώρημα Ώθησης – Ορμής κατά τη διάρκεια της πρόσκρουσης στο έδαφος:

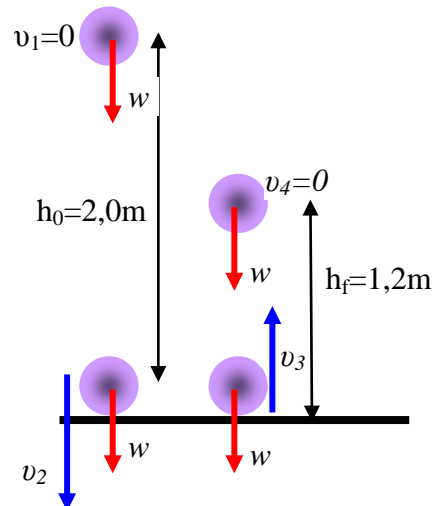
$$J(\Delta\tau_c) = \Delta p \Rightarrow F \Delta\tau_c = p_3 - p_2 \Rightarrow F = \frac{p_3 - p_2}{\Delta\tau_c} = \frac{(2,42 \text{ kgm/s}) - (-3,13 \text{ kgm/s})}{0,0200 \text{ s}} \Rightarrow$$

$$F = 278 \text{ N}$$

- Δ) Μεταβολή της κινητικής ενέργειας κατά τη διάρκεια της κρούσης:

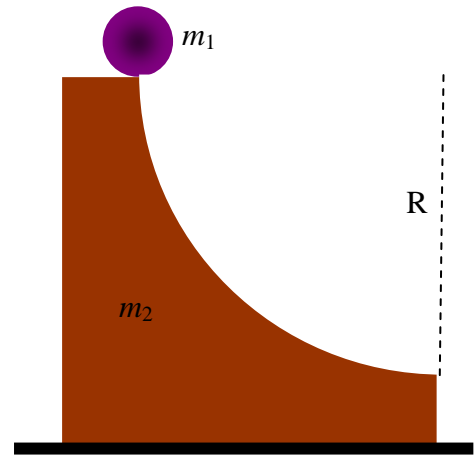
$$\Delta K = K_3 - K_2 = \frac{1}{2}mv_3^2 - \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{m}{2}(v_3^2 - v_2^2) = \frac{0,50 \text{ kg}}{2}[(4,85 \text{ m/s})^2 - (-6,26 \text{ m/s})^2] \Rightarrow$$

$$\Delta K = -3,92 \text{ J}$$

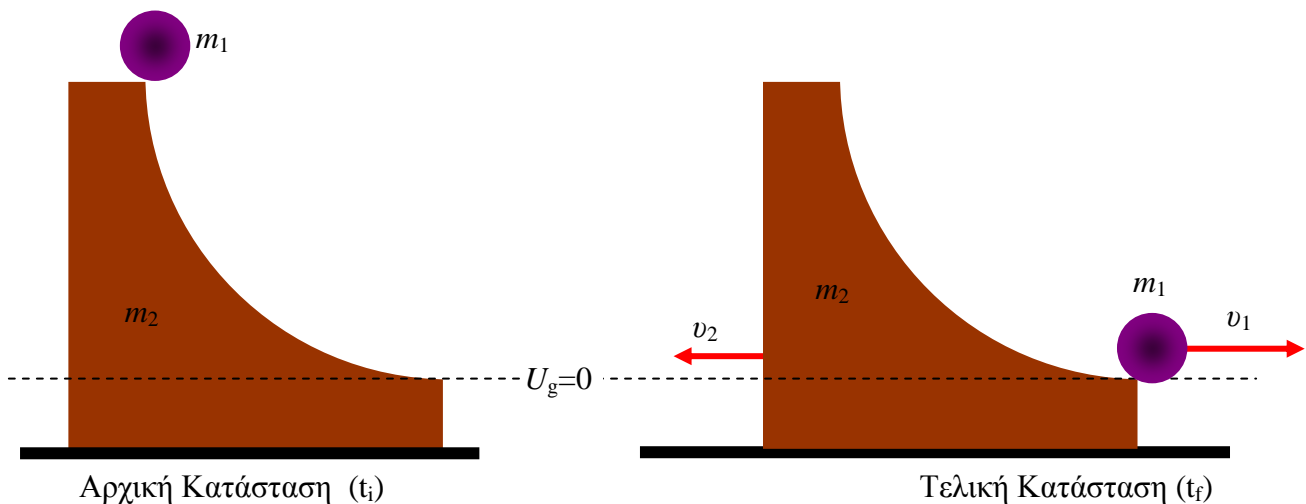


### ΑΣΚΗΣΗ 3

Μια μικρή σφαίρα μάζας  $m_1=0,500\text{ kg}$  ολισθαίνει προς τα κάτω σε ένα κατακόρυφο κυκλικό τόξο ακτίνας  $R=1,00\text{m}$  όπως δείχνει το διπλανό σχήμα. Το σύστημα του κατακόρυφου κυκλικού τόξου έχει μάζα  $m_2$  και ισορροπεί πάνω σε ένα λείο και οριζόντιο τραπέζι. Όπου πιθανότατα υπάρξει κίνηση, οι συντελεστές τριβής ολίσθησης  $\mu_k$  και  $\mu_s$  είναι ίσοι με μηδέν. Αρχικά η σφαίρα βρίσκεται στο ανώτερο σημείο του κυκλικού τόξου και είναι ακίνητο. Αφού αφεθεί ελεύθερη η σφαίρα, να υπολογίσετε την ταχύτητα  $v_1$  με την οποία η σφαίρα απομακρύνεται από το κάτω μέρος του κυκλικού τόξου καθώς και την ταχύτητα  $v_2$  με την οποία ολισθαίνει προς τα αριστερά το σύστημα με το κατακόρυφο κυκλικό τόξο.



### ΛΥΣΗ



Για πρακτικού λόγους οι παράμετροι  $v_1$  και  $v_2$  είναι τα μέτρα των ταχυτήτων της σφαίρας και του συστήματος του κατακόρυφου κυκλικού τόξου. Προσοχή!!! Στις εξισώσεις που θα χρησιμοποιηθούν οι ταχύτητες αυτές να μουν με τα πρόσημά τους δεδομένου ότι η θετική φορά είναι προς τα δεξιά.

Στην αρχική κατάσταση, τόσο η σφαίρα όσο και το σύστημα του κατακόρυφου κυκλικού τόξου είναι σε ηρεμία, οπότε και οι αντίστοιχες ορμές τους  $p_{01}$  και  $p_{02}$  θα είναι ίσε με μηδέν. Ολική αρχική ορμή συστήματος:

$$p_0 = p_{01} + p_{02} = 0$$

Στην τελική κατάσταση, η σφαίρα κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα που έχει μέτρο  $v_1$  ενώ το σύστημα του κατακόρυφου κυκλικού τόξου κινείται προς τα αριστερά με ταχύτητα που έχει μέτρο  $v_2$ . Αυτό σημαίνει ότι η σφαίρα θα έχει ορμή με μέτρο  $p_1 = m_1 v_1$  και το σύστημα κατακόρυφου κυκλικού τόξου θα έχει ορμή με μέτρο  $p_2 = m_2 v_2$

Αρχή Διατήρησης της Ορμής:

(Ολική Αρχική Ορμή) = (Ολική Τελική Ορμή)

$$p_0 = p_1 - p_2 \Rightarrow 0 = m_1 v_1 - m_2 v_2 \Rightarrow m_1 v_1 = m_2 v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{m_1}{m_2} v_1 \quad (3.1)$$

Διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας:

Παίρνουμε ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το επίπεδο που διέρχεται από το κάτω άκρο του κατακόρυφου κυκλικού τόξου. Οπότε:

Στην αρχική κατάσταση, σφαίρα έχει δυναμική ενέργεια  $U_{\Sigma}(\text{Αρχή})=U_{\Sigma}(R)=m_1gR$  και κινητική ενέργεια  $K_{\Sigma}(\text{Αρχή})=0$  (η σφαίρα είναι ακίνητη). Το σύστημα κατακόρυφου κυκλικού τόξου έχει δυναμική ενέργεια  $U_B(\text{Αρχή})$  και κινητική ενέργεια  $K_B(\text{Αρχή})=0$  (είναι ακίνητο).

Ολική Αρχική Μηχανική Ενέργεια:  $E_{\text{Αρχή}} = U_{\Sigma}(\text{Αρχή}) + K_{\Sigma}(\text{Αρχή}) + U_B(\text{Αρχή}) + K_B(\text{Αρχή}) \Rightarrow$

$$E_{\text{Αρχή}} = m_1gR + 0 + U_B(\text{Αρχή}) + 0 \Rightarrow E_{\text{Αρχή}} = m_1gR + U_B(\text{Αρχή}) \quad (3.2)$$

Στην τελική κατάσταση, η σφαίρα έχει δυναμική ενέργεια  $U_{\Sigma}(\text{Τέλος})=0$  (βρίσκεται στο επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας) και κινητική ενέργεια  $K_{\Sigma}(\text{Τέλος}) = \frac{1}{2}m_1v_1^2$ . Το σύστημα κατακόρυφου κυκλικού τόξου διατηρεί την ίδια δυναμική ενέργεια  $U_B(\text{Τέλος})=U_B(\text{Αρχή})=U_B$  (επειδή υπάρχει μόνο οριζόντια μετακίνηση) ενώ έχει αποκτήσει κινητική ενέργεια  $K_B(\text{Τέλος}) = \frac{1}{2}m_2v_2^2$

Ολική Τελική Μηχανική Ενέργεια:  $E_{\text{Τέλος}} = U_{\Sigma}(\text{Τέλος}) + K_{\Sigma}(\text{Τέλος}) + U_B(\text{Τέλος}) + K_B(\text{Τέλος}) \Rightarrow$

$$E_{\text{Τέλος}} = 0 + \frac{1}{2}m_1v_1^2 + U_B + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \Rightarrow E_{\text{Τέλος}} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + U_B(\text{Τέλος}) + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \quad (3.3)$$

Διατήρηση Μηχανικής Ενέργειας:  $E_{\text{Αρχή}}=E_{\text{Τέλος}} \rightarrow$

$$m_1gR + U_B(\text{Αρχή}) = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + U_B(\text{Τέλος}) + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \Rightarrow m_1gR + U_B = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + U_B + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

$$\Rightarrow m_1gR = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \quad (3.4)$$

Αντικαθιστούμε στη Σχέση (3.4) το  $v_1$  από τη Σχέση (3.1) και έχουμε:

$$m_1gR = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\frac{m_1}{m_2}v_1\right)^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1^2}{m_2}v_1^2 \Rightarrow m_1gR = \frac{1}{2}m_1v_1^2\left(\frac{m_1}{m_2}+1\right) \Rightarrow$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gR}{\frac{m_1}{m_2}+1}} \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2 \times (9,80 \text{ m/s}^2) \times (1,00 \text{ m})}{\frac{0,500 \text{ kg}}{2,00 \text{ kg}} + 1}} \Rightarrow v_1 = 3,96 \text{ m/s}$$

Αντικαθιστούμε την ταχύτητα  $v_1$  στη Σχέση (3.1) για να υπολογίσουμε την ταχύτητα  $v_2$  με την οποία σύστημα κατακόρυφου κυκλικού τόξου κινείται προς τα αριστερά:

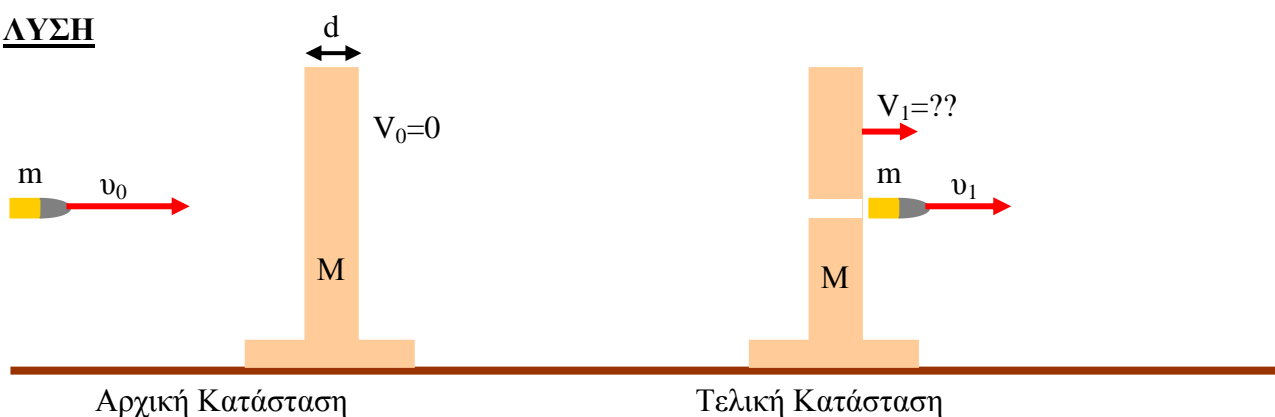
$$v_2 = \frac{m_1}{m_2}v_1 = \frac{0,500 \text{ kg}}{2,00 \text{ kg}} \times (3,96 \text{ m/s}) \Rightarrow v_2 = 0,990 \text{ m/s}$$

#### ΑΣΚΗΣΗ 4

Σε ένα πείραμα βλητικής ένα βλήμα μάζα  $m=25,0\text{ g}$  η οποία κινείται οριζόντια με ταχύτητα  $v_0=1200\text{ m/s}$  διαπερνά ένα ακίνητο στόχο πάχους  $d=30,0\text{ cm}$  και μάζας  $M=350\text{ kg}$  και εξέρχεται από το στόχο με ταχύτητα  $v_1=900\text{ m/s}$ . Στη συνέχεια, ο στόχος ολισθαίνει πάνω σε μια οριζόντια και λεία επιφάνεια. Να υπολογίσετε με ακρίβεια 3 σημαντικών ψηφίων:

- A) Την ταχύτητα του στόχου αμέσως μετά την έξοδο του βλήματος από αυτόν.  
B) Τη δύναμη  $F$  που ασκεί ο στόχος πάνω στο βλήμα έχοντας ως δεδομένο ότι η δύναμη αυτή είναι σταθερή σε όλο το χρονικό διάστημα  $\Delta t$  που το βλήμα είναι μέσα στο στόχο.  
Γ) Το χρονικό διάστημα  $\Delta t$  που το βλήμα βρίσκεται μέσα στο στόχο.

#### ΛΥΣΗ



- A) Υπολογισμός της ταχύτητας  $V_1$  του στόχου.

Το σύστημα είναι το βλήμα και ο στόχος μαζί. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής:

(Αρχική Ορμή Συστήματος) = (Τελική Ορμή Συστήματος) όπου:

(Αρχική Ορμή Συστήματος) = [Ορμή βλήματος ( $p_{0\beta}=m v_0$ )] + [Ορμή στόχου ( $p_{0\sigma}=0$ )]

(Τελική Ορμή Συστήματος) = [Ορμή βλήματος ( $p_{1\beta}=m v_1$ )] + [Ορμή στόχου ( $p_{1\sigma}=M V_{1\sigma}$ )]

Οπότε:

$$p_{0\Sigma} = p_{1\Sigma} \Rightarrow p_{0\beta} + p_{0\sigma} = p_{1\beta} + p_{1\sigma} \Rightarrow m v_0 + 0 = m v_1 + M V_1 \Rightarrow$$

$$V_1 = \frac{m(v_0 - v_1)}{M} = \frac{(0,025\text{ kg}) \times ((1200\text{ m/s}) - (900\text{ m/s}))}{350\text{ kg}} \Rightarrow V_1 = 0,0214\text{ m/s}$$

- B) Υπολογισμός της δύναμης  $F$  που ασκεί ο στόχος πάνω στο βλήμα.

Στο χρονικό διάστημα που το βλήμα διανύει ένα διάστημα  $d=30,0\text{ cm}$  μέσα στο στόχο και καταναλίσκει έργο  $W = F d$  το οποίο είναι αρνητικό επειδή η δύναμη είναι αντίθετη της φοράς της ταχύτητας και το οποίο, σύμφωνα με το θεώρημα έργου κινητικής ενέργειας, είναι ίσο με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του βλήματος:

$$W = \Delta K \Rightarrow F d = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{m}{2} (v_1^2 - v_0^2) \Rightarrow F = \frac{m}{2d} (v_1^2 - v_0^2) \Rightarrow$$

$$F = \frac{0,025\text{ kg}}{2 \times (0,300\text{ m})} \times ((900\text{ m/s})^2 - (1200\text{ m/s})^2) \Rightarrow F = -26200\text{ N} \quad (4.1)$$

Γ) Στο ίδιο χρονικό διάστημα  $\Delta t$ , η σταθερή δύναμη  $F$  ασκεί ώθηση  $J(\Delta t)$  πάνω στο στόχο που είναι ίση με τη μεταβολή  $\Delta p$  του βλήματος:

$$J(\Delta t) = \Delta p \Rightarrow F \Delta t = m v_1 - m v_0 = m(v_1 - v_0) = (0,025 \text{ kg}) \times ((1200 \text{ m/s}) - (900 \text{ m/s})) \Rightarrow$$

$$F \Delta t = -7,5 \text{ Ns} \quad (4.2)$$

Από τις Σχέσεις (4.1) και (4.2) παίρνουμε:

$$\Delta t = -\frac{7,5 \text{ Ns}}{-26200 \text{ N}} \Rightarrow \Delta t = 2,86 \times 10^{-4} \text{ s} \Rightarrow \Delta t = 286 \mu\text{s}$$

## ΑΣΚΗΣΗ 5

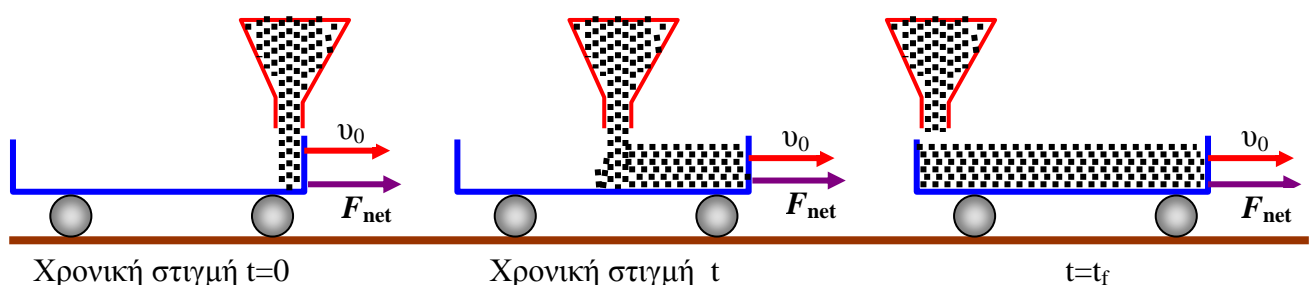
Σε ένα αυτοματοποιημένο νταμάρι που παράγει χαλίκι, η καταπακτή από την οποία εξέρχεται το χαλίκι για να γεμίσει η καρότσα ενός φορτηγού έχει πλάτος ίσο με το πλάτος της καρότσας του φορτηγού και μήκος  $d=50,0 \text{ cm}$ . Μετρήσεις έδειξαν ότι, όταν η καταπακτή είναι ανοιχτή το χαλίκι εξέρχεται με ρυθμός  $R=225 \text{ kg/s}$ . Η καταπακτή ανοίγει και κλείνει αυτόματα όταν το εμπρός και το πίσω μέρος της καρότσας, αντίστοιχα βρεθούν κάτω από αυτήν.

Τα φορτηγά που έχουν μάζα  $M=6,80 \times 10^3 \text{ kg}$  και καρότσα με μήκος  $L=8,00 \text{ m}$  εισέρχονται στην εγκατάσταση παραγωγής χαλικιού με ταχύτητα  $v_0=0,500 \text{ m/s}$  την οποία οι οδηγοί διατηρούν σταθερή ελέγχοντας κατάλληλα το γκάζι..

A) Να υπολογίσετε τη συνολική σταθερή δύναμη  $F_{\text{net}}$  (= κινητήρια δύναμη μηχανής φορτηγού μείον τριβές) που πρέπει να ασκείται πάνω στο φορτηγό ώστε αυτό να κινείται με σταθερή ταχύτητα  $v_0=0,300 \text{ m/s}$  καθώς και τη συνολική μάζα  $m_{\text{χαλίκι}}$  του χαλικιού που θα φορτωθεί στην καρότσα του φορτηγού.

B) Αν ο συντελεστής τριβής κύλισης των τροχών του φορτηγού με το δρόμο είναι  $\mu_r=0,02$ , τότε να υπολογίσετε τη συνολική ενέργεια που κατανάλωσε η μηχανή του φορτηγού κατά τη διάρκεια της φόρτωσης του χαλικιού στην καρότσα του.

## ΛΥΣΗ



A) Στην περίπτωση αυτή δεν ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής αφού πάνω στο φορτηγό ασκείται εξωτερική συνισταμένη δύναμη  $F_{\text{net}}$ . Ισχύει όμως το θεώρημα Ώθησης – Ορμής σύμφωνα με το οποίο:

(Ώθηση που ασκείται πάνω στο φορτηγό) = (μεταβολή της ορμής του φορτηγού) ή ισοδύναμα:

$$J = \Delta p \Rightarrow \int_{t=0}^{t=t_f} F_{\text{net}} dt = p_f - p_0 \quad (5.1)$$

Όπου  $p_0 = M v_0$  είναι η αρχική ορμή του φορτηγού (όταν αυτό δεν έχει καθόλου φορτίο)

$p_f = (M + m_{\text{χαλίκι}}) v_f = (M + m_{\text{χαλίκι}}) v_0$  είναι η τελική ορμή του φορτηγού τη χρονική στιγμή  $t_f$  όταν έχει ήδη φορτωθεί το χαλίκι, οπότε η συνολική μάζα του φορτηγού θα είναι  $M + m_{\text{χαλίκι}}$ . Επί πλέον θέσαμε  $v_f = v_0$  δεδομένου ότι η δύναμη  $F$  υπάρχει για να διατηρεί σταθερή την ταχύτητα του φορτηγού. Οπότε, με δεδομένο ότι η δύναμη  $F$  είναι σταθερή, η Σχέση (11.1) γίνεται:

$$F_{\text{net}} \int_{t=0}^{t=t_f} dt = (M + m_{\text{χαλίκι}}) v_0 - M v_0 \Rightarrow F_{\text{net}} t_f = (M + m_{\text{χαλίκι}}) v_0 - M v_0$$

$$F_{\text{net}} = \frac{(M + m_{\text{χαλίκι}}) v_0 - M v_0}{t_f} \quad (5.2)$$

Υπολογισμός του χρόνου φόρτωσης  $t_f$  και της συνολικής μάζας  $m_{\text{χαλίκι}}$  του φορτίου.

Το χαλίκι αρχίζει να ρέει τη στιγμή που το εμπρός μέρος της καρότσας βρεθεί κάτω από την καταπακτή εξόδου του χαλικιού. Η ροή του χαλικιού σταματά όταν το πίσω μέρος της καρότσας βρεθεί κάτω από την καταπακτή. Από το σχήμα της άσκησης προκύπτει ότι η συνολική μετακίνηση της καρότσας θα είναι  $L' = L - d$ , όπου  $d = 50,0 \text{ cm}$ .

$$L' = 8,00 \text{ m} - 0,50 \text{ m} = 7,50 \text{ m} \quad (5.3)$$

Επειδή το φορτηγό κινείται με σταθερή ταχύτητα  $v_0 = 0,300 \text{ m/s}$  ο συνολικός χρόνος κίνησης του φορτηγού θα είναι:

$$v_0 = \frac{L'}{t_f} \Rightarrow t_f = \frac{L'}{v_0} = \frac{7,50 \text{ m}}{0,300 \text{ m/s}} \Rightarrow t_f = 25,0 \text{ s} \quad (5.4)$$

Με δεδομένο το ρυθμό  $R = 225 \text{ kg/s}$  με τον οποίο εξέρχεται το χαλίκι από την καταπακτή, στο χρονικό διάστημα  $t_f = 25,0 \text{ s}$  η συνολική μάζα χαλικιού που θα φορτωθεί στη καρότσα του φορτηγού θα είναι:

$$m_{\text{χαλίκι}} = R t_f = (225 \text{ kg/s}) \times (25,0 \text{ s}) \Rightarrow m_{\text{χαλίκι}} = 5630 \text{ kg} \quad (5.5)$$

Αντικαθιστούμε στη Σχέση (5.2) το χρόνο φόρτωσης  $t_f$  του φορτηγού και τη συνολική μάζα  $m_{\text{χαλίκι}}$  που βρήκαμε και βρίσκουμε τη συνισταμένη δύναμη που πρέπει να ασκείται στο φορτηγό για να διατηρεί την ταχύτητά του σταθερή:

$$F_{\text{net}} = \frac{(M + m_{\text{χαλίκι}}) v_0 - M v_0}{t_f} = \frac{(6800 \text{ kg} + 5630 \text{ kg}) \times 0,300 \text{ m/s} - (6800 \text{ kg}) \times 0,300 \text{ m/s}}{25 \text{ s}}$$

$$F_{\text{net}} = 67,6 \text{ N} \quad (5.6)$$

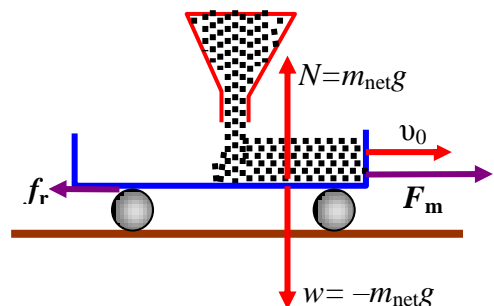
- B) Στο διπλανό σχήμα έχουμε ένα στιγμιότυπο που αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή  $t$  της φόρτωσης του φορτηγού μαζί με την κινητήρια δύναμη  $F_m$  και τη συνολική δύναμη τριβής κύλισης  $f_r$ . Η συνισταμένη των δυο αυτών δυνάμεων είναι η δύναμη  $F_{\text{net}} = 67,6 \text{ N}$  που υπολογίσαμε στο προηγούμενο ερώτημα:

$$F_{\text{net}} = F_m - f_r \Rightarrow F_m = F_{\text{net}} + f_r \quad (5.7)$$

όπου η τριβή  $f_r$  ισούται μες τη κάθετη δύναμη  $N$ , η οποία είναι ίση με το βάρος του φορτηγού συν το βάρος του χαλικιού που είναι φορτωμένο, επί το συντελεστή τριβής  $\mu_r$ :

$$f_r = \mu_r N \Rightarrow f_r = \mu_r m_{\text{net}} g \Rightarrow f_r = \mu_r (M + m_{\text{χαλίκι}}) g \Rightarrow f_r = \mu_r (M + R t) g \quad (5.8)$$

Από τις Σχέσεις (5.4) και (5.5) έχουμε:





$$F_m = F_{net} + f_r = F_{net} + \mu_r (M + Rt)g \quad (5.9)$$

Η ενέργεια που καταναλώθηκε από τη μηχανή του φορτηγού (η ενέργεια αυτή έχει άμεση σχέση με τη ποσότητα καυσίμου που καταναλώθηκε) είναι ίση με το έργο που παρήγαγε το φορτηγό στο διάστημα  $L'$  που μετακινήθηκε κατά τη φόρτωση με την επίδραση της  $F_m$ .

Επειδή η δύναμη  $F_m = F_m(t)$  εξαρτάται από το χρόνο, για να υπολογίσουμε το συνολικό έργο που παράχθηκε από το φορτηγό κατά τη διάρκεια της φόρτωσης θεωρούμε ότι σε χρονικό διάστημα  $dt$  το φορτηγό μετακινήθηκε κατά στοιχειώδες διάστημα  $dx$  και παρήγαγε στοιχειώδες έργο  $dW$  τέτοιο ώστε:

$$dW = F(t) ds = (F_{net} + \mu_r (M + Rt)g) v_0 dt \quad (5.10)$$

όπου αντικαταστήσαμε τη δύναμη  $F_m$  από τη Σχέση (5.9) και θέσαμε  $ds = v_0 dt$ . Με ολοκλήρωση της Σχέσης (5.10) στο χρονικό διάστημα από 0 s μέχρι  $t_f = 23,3$  s (που είναι ίσο με τη διάρκεια της φόρτωσης) παίρνουμε:

$$W = \int dW = v_0 \int_0^{t_f} (F_{net} + \mu_r (M + Rt)g) dt = v_0 \left( \int_0^{t_f} F_{net} dt + \mu_r g M \int_0^{t_f} dt + \mu_r R g \int_0^{t_f} t dt \right) \Rightarrow$$

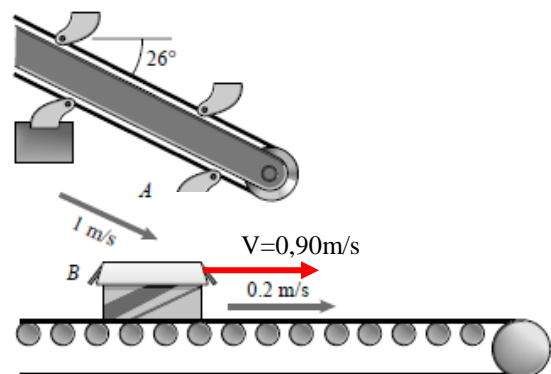
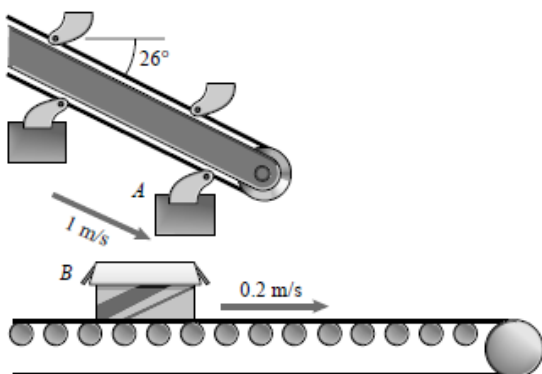
$$W = v_0 \left( F_{net} t_f + \mu_r g M t_f + \frac{\mu_r R g}{2} t_f^2 \right) = v_0 t_f \left( F_{net} + \mu_r g \left( M + \frac{R t_f}{2} \right) \right) =$$

$$= (0,300 \text{ m/s}) \times (25,0 \text{ s}) \left( 67,6 \text{ N} + 0,02 \times (9,80 \text{ m/s}^2) \times \left( 6800 \text{ kg} + \frac{(225 \text{ kg/s}) \times (25,0 \text{ s})}{2} \right) \right) \Rightarrow$$

$$W = 14600 \text{ J}$$

## ΑΣΚΗΣΗ 6

Σε μια αυτοματοποιημένη μονάδα φόρτωση χαρτοκιβωτίων, τα χαρτοκιβώτια B τα οποία έχουν μάζα  $m_B = 1,6 \text{ kg}$  κινούνται οριζόντια με ταχύτητα  $v_{Bx} = 0,20 \text{ m/s}$  με τη βοήθεια ενός κυλιόμενου ιμάντα. Το φορτίο A κάθε κιβωτίου που έχει μάζα  $m_A = 12 \text{ kg}$  μεταφέρεται με ταχύτητα  $v_A = 1,0 \text{ m/s}$  με άλλο κυλιόμενο ιμάντα του οποίου η διεύθυνση κίνησης σχηματίζει γωνία  $\theta = 26^\circ$  με το οριζόντιο επίπεδο (βλέπε σχήμα άσκησης). Τη χρονική στιγμή που το φορτίο A βρίσκεται ακριβώς πάνω από το ανοιχτό χαρτοκιβώτιο B, το φορτίο αφήνεται ελεύθερο και πέφτει μέσα στο χαρτοκιβώτιο B όπου και κολλά στον πάτο του. Αν συντελεστή κινητικής τριβής ολίσθησης μεταξύ κιβωτίου και κυλιόμενου ιμάντα είναι  $\mu_k = 0,2$  να υπολογίσετε το διάστημα  $d$  που θα ολισθήσει το χαρτοκιβώτιο πάνω στην κυλιόμενο ιμάντα.



## ΛΥΣΗ

Για να απλοποιήσουμε τη λύση του προβλήματος θεωρούμε ότι ο παρατηρητής που παρακολουθεί τη φόρτωση των χαρτοκιβωτίων κινείται παράλληλα με την οριζόντια μεταφορική ταινία και με την ίδια με αυτή ταχύτητα. Πριν πέσει το φορτίο μέσα στο χαρτοκιβώτιο, ο παρατηρητής θα βλέπει το χαρτοκιβώτιο ακίνητο (δεν υπάρχει σχετική κίνηση μεταξύ κινητών που έχουν την ίδια ταχύτητα).

Το φορτίο πλησιάζει το χαρτοκιβώτιο με ταχύτητα  $v_A = 1,0 \text{ m/s}$  που σχηματίζει γωνία  $\theta = 26^\circ$  με το οριζόντιο επίπεδο. Η φόρτωση των χαρτοκιβωτίων εξαρτάται μόνο από την οριζόντια συνιστώσα της ταχύτητας  $v_A$  η οποία είναι ίση με:

$$v_{Ax} = v_A \cos \theta = (1,0 \text{ m/s}) \times \cos 26^\circ \Rightarrow v_{Ax} = 0,90 \text{ m/s}$$

Η σχετική οριζόντια ταχύτητα  $v'_{Ax}$  του φορτίου B ως προς τον παρατηρητή θα είναι ίση με:

$$v'_{Ax} = v_{Ax} - v_{Bx} = (0,90 \text{ m/s}) - (0,20 \text{ m/s}) \Rightarrow v'_{Ax} = 0,70 \text{ m/s}$$

Για τον κινούμενο παρατηρητή, το σύστημα στο οποίο διατηρείται η ορμή είναι το χαρτοκιβώτιο B και το φορτίο A:

Διατήρηση της ορμής του συστήματος Χαρτοκιβώτιο – Φορτίο για τον κινούμενο παρατηρητή:

(Αρχική ορμή συστήματος πριν το φορτίο πέσει στο χαρτοκιβώτιο) = (Τελική ορμή συστήματος όπου το φορτίο είναι μέσα στο χαρτοκιβώτιο) ή ισοδύναμα:

(Αρχική ορμή συστήματος πριν το φορτίο πέσει στο χαρτοκιβώτιο) = (οριζόντια ορμή φορτίου  $p'_{Ax} = m_A v'_{Ax}$ ) + (ορμή ακίνητου χαρτοκιβωτίου  $p_{Bx} = 0$ )

(Τελική ορμή συστήματος με το φορτίο μέσα στο χαρτοκιβώτιο) = (ορμή μάζα φορτίου μαζί με μάζα χαρτοκιβωτίου που κινούνται με ταχύτητα V:  $p_{ABx} = (m_A + m_B)V$ )

$$p'_{Ax} + p_{Bx} = p_{ABx} \Rightarrow m_A v'_{Ax} + 0 = (m_A + m_B)V \Rightarrow V = \frac{m_A v'_{Ax}}{m_A + m_B} \Rightarrow$$

$$V = \frac{(12 \text{ kg}) \times (0,70 \text{ m/s})}{12 \text{ kg} + 1,6 \text{ kg}} \Rightarrow V = 0,62 \text{ m/s}$$

Η ταχύτητα  $V = 0,62 \text{ m/s}$  που βρήκαμε είναι η ταχύτητα με την οποία αρχίζει να ολισθαίνει το χαρτοκιβώτιο μαζί με το φορτίο πάνω στον κυλιόμενο ιμάντα. Η ταχύτητα αυτή είναι η σχετική ταχύτητα του χαρτοκιβωτίου με το φορτίο σε σχέση με τον κινούμενο παρατηρητή.

Για τον κινούμενο παρατηρητή, η ταχύτητα V θα μειώνεται εξ αιτίας της κινητικής τριβής ολίσθησης του χαρτοκιβωτίου με τον ιμάντα. Η κινητική τριβή ολίσθησης  $f_{kx}$  είναι αντίθετη με τη φορά της ταχύτητας V και είναι ίση με το συνολικό βάρος χαρτοκιβωτίου-φορτίου επί τον αντίστοιχο συντελεστή τριβής  $\mu_k = 0,2$ .

$$f_{kx} = -\mu_k (m_A + m_B) g$$

Για τον κινούμενο παρατηρητή, η δύναμη της τριβής καταναλίσκει ένα έργο W το οποίο, σύμφωνα με το θεώρημα έργου κινητικής ενέργειας, είναι ίσο με τη μεταβολή  $\Delta K$  της κινητικής ενέργειας του χαρτοκιβωτίου με το φορτίο. Αρχικά το σύστημα χαρτοκιβώτιο-φορτίο είχε ταχύτητα V (και συνεπώς κινητική ενέργεια  $(m_A + m_B)V^2/2$ ) η οποία στο τέλος γίνεται μηδέν. Οπότε:

$$W = \Delta K \Rightarrow f_{kx} = K_f - K_i \Rightarrow -\mu_k (m_A + m_B) g d = 0 - \frac{1}{2} (m_A + m_B) V^2 \Rightarrow$$

$$d = \frac{V^2}{2\mu_k g} \Rightarrow d = \frac{(0,62 \text{ m/s})^2}{2 \times 0,2 \times (9,80 \text{ m/s}^2)} \Rightarrow d = 0,098 \text{ m} = 9,8 \text{ cm}$$

## ΣΧΟΛΙΟ ΕΠΙ ΤΟΥ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΟΣ

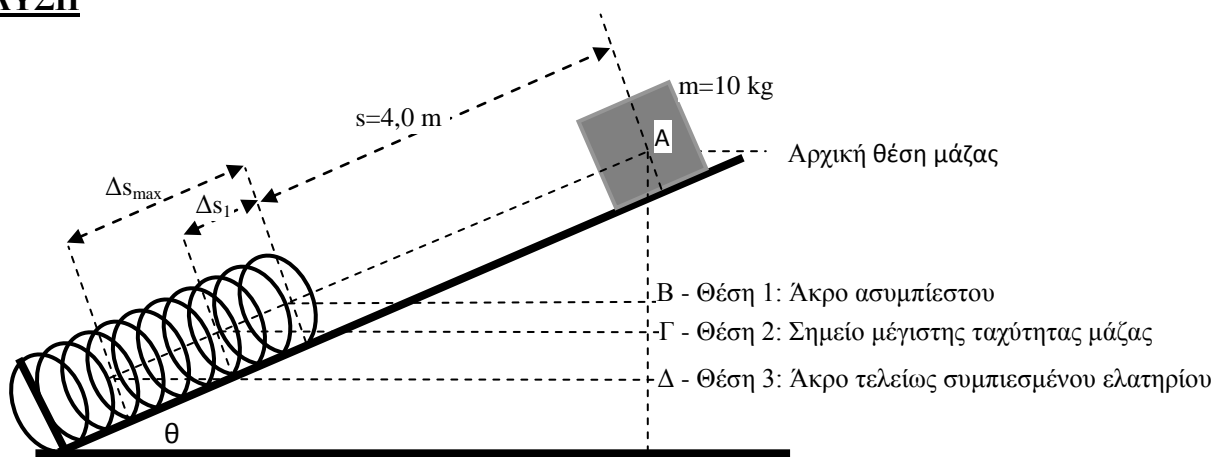
Κατά τη διαδικασία της τοποθέτησης του φορτίου μέσα στα χαρτοκιβώτια, το κάθε χαρτοκιβώτιο ολισθαίνει προς τα εμπρός κατά ένα διάστημα  $d=9,8\text{ cm}$ . Αυτό σημαίνει ότι τα χαρτοκιβώτια που μεταφέρονται με τον κυλιόμενο ιμάντα δεν πρέπει να απέχουν μεταξύ τους απόσταση μικρότερη από το διάστημα  $d=9,8\text{ cm}$ . Στην περίπτωση που η απόσταση αυτή ήταν μικρότερη από τα  $9,8\text{ cm}$ , τα χαρτοκιβώτια θα ολίσθαιναν και θα έπεφτε το ένα πάνω στο άλλο με αποτέλεσμα να διαταρασσόταν ο συγχρονισμός του ιμάντα μεταφοράς του φορτίου με τον ιμάντα μεταφοράς των χαρτοκιβωτίων.

## ΑΣΚΗΣΗ 7

Ένα κουτί μάζας  $10\text{ kg}$  κατεβαίνει ολισθαίνοντας μια λεία ράμπα μήκους  $4,0\text{ m}$  και στη συνέχεια προσκρούει σε ένα ελατήριο με σταθερά  $250\text{ N/m}$ .

- α. Ποια είναι η μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου;  
β. Πόσο συμπιεσμένο είναι το ελατήριο όταν το κουτί έχει τη μέγιστη ταχύτητα;

## ΛΥΣΗ



- α) Να υπολογίσετε τη μέγιστη παραμόρφωση  $\Delta s_{\max}$  του ελατηρίου:

Το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από τη Θέση 3 του άκρου του ελατηρίου (κατάσταση μέγιστης συμπίεσης) λαμβάνεται ως το επίπεδο με δυναμική ενέργεια ίση με το μηδέν ( $U_3=0$ ).

Η μάζα βρίσκεται σε ύψος  $h=(AB)+(B\Delta)$ , όπου:

$$(AB) = s \sin \theta = s \sin 30 = \frac{s}{2} = 2\text{ m}$$

$$(B\Delta) = \Delta s_{\max} \sin \theta = \Delta s_{\max} \sin 30 = \frac{\Delta s_{\max}}{2}$$

Στη θέση A η μάζα έχει μόνο βαρυτική δυναμική ενέργεια  $U_A$  ως προ επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας (θέση 3):  $U_A = mg((AB) + (B\Gamma)) = mg\left(\frac{s}{2} + \frac{\Delta s_{\max}}{2}\right)$

Στη θέση 3 το σύστημα ελατήριο-μάζα έχει μόνο ελαστική δυναμική ενέργεια (η βαρυτική δυναμική ενέργεια εξ ορισμού είναι μηδέν):  $U_{sp, \max} = \frac{1}{2} k (\Delta s_{\max})^2$

Διατήρηση της Μηχανικής ενέργειας:

$$U_A = U_{sp} \Rightarrow mg\left(\frac{s}{2} + \frac{\Delta s_{\max}}{2}\right) = \frac{1}{2}k(\Delta s_{\max})^2 \Rightarrow mgs + mg\Delta s_{\max} = k(\Delta s_{\max})^2 \Rightarrow$$

$$(\Delta s_{\max})^2 - \frac{mg}{k}(\Delta s_{\max}) - \frac{mgs}{k} = 0$$

Από τη λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης βρίσκουμε:  $\Delta s_{\max} = 1,46 \text{ m}$

B) Σε ένα σύστημα μάζα-ελατήριο, η μάζα έχει τη μέγιστη ταχύτητα όταν αυτή διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του συστήματος. Όταν έρθει σε επαφή η μάζα με το δεξιό άκρο του ελατηρίου η δύναμη που θα συμπίεσει το ελατήριο θα είναι ίση με την προβολή  $w_s$  του βάρους  $w$  της μάζας πάνω στη διεύθυνση που είναι παράλληλη με τη διεύθυνση του κεκλιμένου επιπέδου:

$$w_s = w \sin 30 = \frac{mg}{2}$$

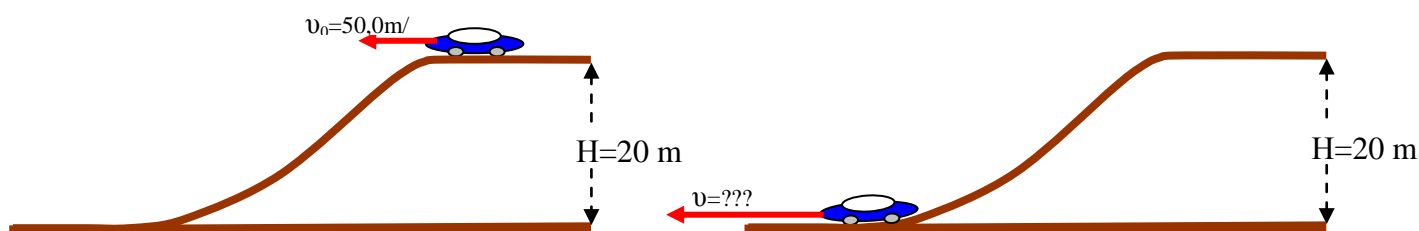
Στην κατάσταση ισορροπίας η δύναμη αυτή προκαλεί τη ζητούμενη παραμόρφωση  $\Delta s_1$ . Από το νόμο του Hook έχουμε:

$$w_s = k(\Delta s_1) \Rightarrow (\Delta s_1) = \frac{w_s}{k} = \frac{mg}{2k} \Rightarrow (\Delta s_1) = \frac{(10 \text{ kg}) \times (9,8 \text{ m/s}^2)}{2 \times 500 \text{ N/m}} = 0,196 \text{ m}$$

## ΑΣΚΗΣΗ 8

Οδηγείτε με ταχύτητα  $v_0 = 50,0 \text{ km/h}$  σε ένα οριζόντιο δρόμο όταν ξαφνικά ο δρόμος αυτός κατηφορίζει προς μια κοιλάδα. Η κατακόρυφη απόσταση μεταξύ οριζόντιου δρόμου και κοιλάδας είναι  $H = 20,0 \text{ m}$ . Τη χρονική στιγμή που μπήκατε στον κατηφορικό δρόμο ελευθερώνετε τον συμπλέκτη του αυτοκινήτου σας και το αυτοκίνητο κατηφορίζει ελεύθερα προς την κοιλάδα. Τη στιγμή που φθάνετε στο επίπεδο της κοιλάδας, βλέπετε ένα τροχονόμο κρυμμένο πίσω από την πινακίδα ορίου ταχύτητας η οποία έγραφε "Ανώτατο Όριο Ταχύτητας  $v_{\max} = 70,0 \text{ km/h}$ ". Ο τροχονόμος θα σας γράψει κλήση για υπέρβαση του ορίου ταχύτητας;

## ΛΥΣΗ



Αρχική Κατάσταση:

Κινητική ενέργεια :  $K_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$

Δυναμική Ενέργεια :  $U_0 = mgH$

Μηχανική Ενέργεια :  $E_0 = K_0 + U_0$

Διατήρηση της Μηχανικής Ενέργειας:

$$E_0 = E \Rightarrow K_0 + U_0 = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 + mgH = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v_0^2 + 2gH = v^2 \Rightarrow$$

Τελική Κατάσταση:

Κινητική ενέργεια :  $K = \frac{1}{2}mv^2$

Δυναμική Ενέργεια :  $U = 0$

Μηχανική Ενέργεια :  $E = K + U$

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gH} \quad (1)$$

Μετατροπή της αρχικής ταχύτητας του αυτοκινήτου και του ορίου ταχύτητας σε μονάδες m/s:

$$v_0 = 50,0 \text{ km/s} = 50,0 \times \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} \Rightarrow v_0 = 13,9 \text{ m/s}$$

Από τα δεδομένα του προβλήματος και τη Σχέση (1) παίρνουμε:

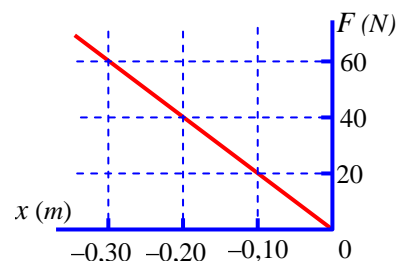
$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gH} \Rightarrow \sqrt{(13,9 \text{ m/s})^2 + 2 \times (9,80 \text{ m/s}^2) \times (20 \text{ m})} \Rightarrow v = 24,2 \text{ m/s}$$

$$\text{Η ισοδύναμη: } v = 24,2 \text{ m/s} = 24,2 \times \frac{10^{-3} \text{ km}}{\frac{1}{3600} \text{ h}} = 24,2 \times \frac{3600}{1000} \text{ km/h} \Rightarrow v = 87,1 \text{ km/h}$$

Στο τέλος της κατηφόρας το αυτοκίνητο θα κινείται με ταχύτητα  $v=87,1 \text{ Km/h}$  η οποία είναι μεγαλύτερη από το όριο των  $v_{\max}=70,0 \text{ km/h}$ . Κατόπιν τούτου, ο τροχονόμος θα δώσει κλήση στον οδηγό του αυτοκινήτου.

### ΑΣΚΗΣΗ 9

Μια πέτρα με μάζα  $m=50,0 \text{ g}$  τοποθετείται σε μια σφεντόνα. Εκτείνοντας τον λαστιχένιο ιμάντα της σφεντόνας, η δύναμη που ασκεί αυτός πάνω στην πέτρα συναρτήσει της επιμήκυνσής του απεικονίζεται στο διπλανό σχήμα.



- Ο λαστιχένιος ιμάντας υπακούει στον νόμο του Hook;
- Να υπολογίσετε τη σταθερά  $k$  του λάστιχου.
- Ο λαστιχένιος ιμάντας εκτείνεται κατά  $30,0 \text{ cm}$  και στη συνέχεια ελευθερώνεται. Να υπολογίσετε την ταχύτητα με την οποία εκτοξεύεται η πέτρα.

### ΛΥΣΗ

- Ο λαστιχένιος ιμάντας υπακούει στον νόμο του Hook επειδή η δύναμη επαναφοράς του λάστιχου είναι ανάλογη με την επιμήκυνσή του,  $F=-kx$ .

$$\beta) \quad k = -\frac{\Delta F}{\Delta x} = -\frac{60 \text{ N} - 0 \text{ N}}{-0,30 \text{ m} - 0 \text{ m}} \Rightarrow k = 200 \text{ N/m}$$

- Όταν ο λαστιχένιος ιμάντας έχει επιμηκυνθεί κατά διάστημα  $\Delta x=30,0 \text{ cm}$  μέσα σε αυτόν έχει αποθηκευθεί δυναμική ενέργεια:  $U = \frac{1}{2} k (\Delta x)^2 \quad (1)$

Όταν ο λαστιχένιος ιμάντας αφεθεί ελεύθερος, η παραπάνω δυναμική ενέργεια μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια:  $K = \frac{1}{2} m v^2 \quad (2)$

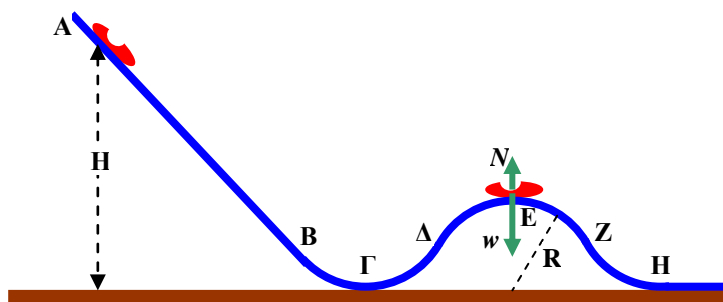
Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας:

$$K = U \Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} k (\Delta x)^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{k}{m}} (\Delta x) = \sqrt{\frac{200 \text{ N/m}}{0,0500 \text{ kg}}} (0,300 \text{ m}) \Rightarrow$$

$$v = 19,0 \text{ m/s}$$

## ΑΣΚΗΣΗ 10

Ο ιδιοκτήτης ενός Luna Park σας αναθέτει να μελετήσετε την παρακάτω τροχιά ενός βαγονιού.



Η τροχιά έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

Μέγιστο ύψος αφετηρίας βαγονιού:  $H=20,0\text{ m}$

Το Τμήμα AB είναι ευθύγραμμο, ενώ τα τμήματα (BΓΔ), (ΔΕΖ) και (ΖΗ) είναι κυκλικά τόξα με ακτίνα R.

Από την μελέτη πρέπει να προκύπτει η ελάχιστη ακτίνα  $R_{\min}$  του κυκλικού τόξου (ΔΕΖ) για να μη εκτροχιαστεί το βαγόνι όταν αυτό περνά από το σημείο E.

## ΛΥΣΗ

Για να μην εκτροχιαστεί το βαγόνι στο σημείο E, πρέπει στο σημείο αυτό το βαγόνι πρέπει να είναι σε επαφή με την τροχιά. Αυτό σημαίνει ότι πάνω στο βαγόνι θα ασκούνται οι εξής δυνάμεις:

Το βάρος του βαγονιού:  $w=mg$  και η κάθετη δύναμη N από την τροχιά. Η συνισταμένη αυτών των δυνάμεων πρέπει να είναι ίση με την κεντρομόλο δύναμη  $F_R = \frac{mv^2}{R}$  που κρατά το βαγόνι σε κυκλική τροχιά. Συγκεκριμένα:

$$N - w = -F_R \Rightarrow N - mg = -\frac{mv^2}{R} \quad (10.1)$$

Το αρνητικό πρόσημο στο βάρος και στην κεντρομόλο δύναμη στη θέση E μπήκε επειδή οι δυνάμεις αυτές έχουν φορά προς τα κάτω. Οριακά, όταν το βαγόνι πάψει να έχει επαφή με την τροχιά, τότε η κάθετη δύναμη N θα είναι ίση με το μηδέν. Έστω ότι στην κατάσταση αυτή η ταχύτητα του βαγονιού είναι ίση με  $v_{\max}$ . Οπότε από τη Σχέση (10.1) θα έχουμε:

$$0 - mg = -\frac{mv_{\max}^2}{R} \Rightarrow v_{\max}^2 = gR \quad (10.2)$$

Από την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας μπορούμε να βρούμε τη σχέση που συνδέει την ταχύτητα  $v_{\max}$  με το μέγιστο ύψος H της θέσης της αφετηρίας του βαγονιού.

Σε μια τυχαία περίπτωση, θεωρούμε ότι η αφετηρία του βαγονιού βρίσκεται σε ύψος h από το κατώτατο σημείο της τροχιάς. Για την περίπτωση αυτή εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας:

$$\text{Δυναμική ενέργεια στη θέση της αφετηρίας: } U = mgh \quad (10.3)$$

$$\text{Δυναμική και κινητική ενέργεια στη θέση E: } U_E = m g R \quad \text{και} \quad K_E = \frac{1}{2} m v^2 \quad (10.4)$$

$$\text{Αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας: } E(\text{στην αφετηρία}) = E(\text{στη θέση E}) \Rightarrow$$

$$U = U_E + K_E \Rightarrow m g h = m g R + \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow v^2 = 2 g (h - R) \quad (10.5)$$

Για να μην εκτροχιαστεί το βαγόνι πρέπει και η ταχύτητα αυτή (βλέπε Σχέση 10.5) να είναι ίση με  $v_{\max}$ . Από τη Σχέση (10.5) όμως προκύπτει ότι για να είναι η ταχύτητα ίση με  $v_{\max}$  θα πρέπει η θέση της αφετηρίας να βρίσκεται και αυτό στο μέγιστο δυνατό ύψος. Το ύψος αυτό το συμβολίζουμε με  $H$ . Οπότε, η Σχέση (10.5) γίνεται:

$$v_{\max}^2 = 2 g (H - R) \quad (10.6)$$

Από τις Σχέσεις (10.2) και (10.6) προκύπτει τελικά ότι:

$$g R = 2 g (H - R) \Rightarrow g R = 2 g H - 2 g R \Rightarrow R = \frac{2}{3} H = \frac{2}{3} \times 20,0 m \Rightarrow R = 13,3 m$$

## ΑΣΚΗΣΗ 11

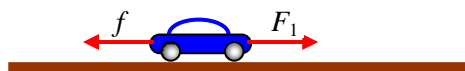
Η ιπποδύναμη (ισχύς) ενός μικρού αυτοκινήτου είναι  $P_{\max} = 120 \text{ hp}$  ( $1 \text{ hp} = 735,5 \text{ Watt}$ ). Η μάζα του αυτοκινήτου είναι  $m = 1,00 \times 10^3 \text{ kg}$ . Υποθέστε ότι η συνολική δύναμη που αντιστέκεται στην κίνηση του αυτοκινήτου είναι ανάλογη με την ταχύτητα  $v$  του αυτοκινήτου. Συγκεκριμένα:  $f = a v$  όπου  $a = 1,00 \times 10^2 \text{ Ns/m}$ . Να υπολογίσετε τη μέγιστη ταχύτητα  $v_{\max}$  με την οποία μπορεί να κινηθεί το συγκεκριμένο αυτοκίνητο:

- σε ένα οριζόντιο δρόμο, και,
- σε ένα ανηφορικό δρόμο που σχηματίζει γωνία  $\theta = 30^\circ$ .

## ΛΥΣΗ

Μετατρέπουμε την ιπποδύναμη του αυτοκινήτου στη μονάδα του Διεθνούς Συστήματος S.I.:

$$P_{\max} = 120 \text{ hp} = 120 \times 735,5 \text{ W} \Rightarrow P_{\max} = 88300 \text{ W}$$



- Έστω ότι, η μέγιστη ταχύτητα που μπορεί να αποκτήσει το αυτοκίνητο στον οριζόντιο δρόμο είναι  $v_{1,\max}$ . Στην περίπτωση που το αυτοκίνητο κινείται με τη σταθερή αυτή ταχύτητα, η μηχανή του λειτουργεί στη μέγιστη ισχύ που είναι  $P_{\max} = 88300 \text{ W}$ . Με την ισχύ αυτή η μηχανή ωθεί το αυτοκίνητο με μια δύναμη  $F_1$  η οποία αντισταθμίζει τη συνισταμένη  $f_{1,\max}$  των δυνάμεων που αντιστέκονται στην κίνησή του:

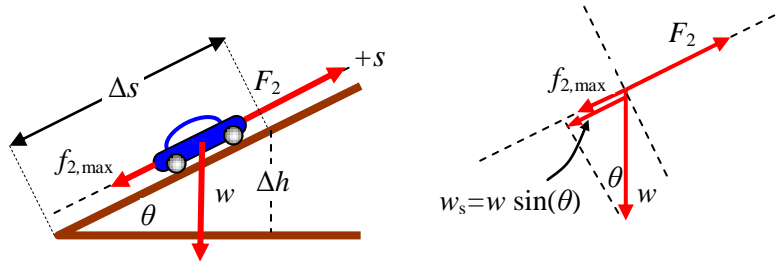
$$F_1 = f_{1,\max} = a v_{1,\max}$$

Στην κατάσταση αυτή, η μηχανή παρέχει τη μέγιστη ισχύ:  $P_{\max} = F_1 v_{1,\max} = a v_{1,\max}^2 \Rightarrow$

$$v_{1,\max} = \pm \sqrt{\frac{P_{\max}}{a}} = \pm \sqrt{\frac{88300 \text{ W}}{1,00 \times 10^2 \text{ Ns/m}}} \Rightarrow v_{1,\max} = \pm 29,7 \text{ m/s} \quad \text{ή} \quad v_{1,\max} = \pm 107 \text{ km/h}$$

Το πρόσημο  $\pm$  σημαίνει ότι το αυτοκίνητο μπορεί να κινείται προς τη θετική ή την αρνητική κατεύθυνση.

β)



Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε ότι το αυτοκίνητο ανέρχεται την ανηφόρα με τη μέγιστη ταχύτητα  $v_{2,\max}$  οπότε η μηχανή του παρέχει τη μέγιστη δυνατή ισχύ  $P_{\max}=88300 \text{ W}$  με την οποία το αυτοκίνητο ωθείται προς τα πάνω με τη δύναμη  $F_2$ . Η δύναμη αυτή πρέπει να αντισταθμίσει τη συνισταμένη  $f_{2,\max}=av_{2,\max}$  των δυνάμεων αντίστασης καθώς και το βάρος  $w=mg$  του αυτοκινήτου.

Σε χρονικό διάστημα  $\Delta t$  το αυτοκίνητο διάνυσε ένα διάστημα  $\Delta s$  κατά μήκος της ανηφόρας με σταθερή ταχύτητα:  $v_{2,\max} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

Στο ίδιο χρονικό διάστημα, η δύναμη  $F_2$  παρήγαγε έργο:

$$W_2 = F_2 \Delta s = P_{\max} \Delta t \quad (11.1)$$

Επειδή το αυτοκίνητο κινείται με σταθερή ταχύτητα  $v_{2,\max}$ , η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται πάνω στο αυτοκίνητο στη  $s$ -διεύθυνση πρέπει να είναι ίση με το μηδέν. Από το παραπάνω διάγραμμα δυνάμεων προκύπτει ότι:

$$F_2 = f_{2,\max} + w \sin(\theta) \Rightarrow F_2 = av_{2,\max} + mg \sin(\theta) \quad (11.2)$$

Οπότε, η Σχέση (11.1) γίνεται:

$$W_2 = (av_{2,\max} + mg \sin(\theta)) \Delta s \Rightarrow W_2 = av_{2,\max} \Delta s + mg \sin(\theta) \Delta s \quad (11.3)$$

Από τις Σχέσεις (11.1) και (11.3) προκύπτει ότι:

$$P_{\max} \Delta t = av_{2,\max} \Delta s + mg \sin(\theta) \Delta s \Rightarrow P_{\max} = a v_{2,\max} \frac{\Delta s}{\Delta t} + mg \sin(\theta) \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$P_{\max} = a v_{2,\max}^2 + mg \sin(\theta) v_{2,\max} \Rightarrow a v_{2,\max}^2 + mg \sin(\theta) v_{2,\max} - P_{\max} = 0 \quad (4)$$

Η Σχέση (11.4) είναι μια δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς  $v_{2,\max}$  της οποίας η λύση είναι:

$$v_{2,\max} = \frac{-mg \sin(\theta) \pm \sqrt{(mg \sin(\theta))^2 + 4aP_{\max}}}{2a} \Rightarrow$$

$$v_{2,\max} = \frac{-(1000 \text{ kg})(9,80 \text{ m/s}^2) \sin 30 \pm \sqrt{((1000 \text{ kg})(9,80 \text{ m/s}^2) \sin 30)^2 + 4 \times (100 \text{ Ns/m})(88300 \text{ W})}}{2 \times 100 \text{ Ns/m}} \Rightarrow$$

$$v_{2,\max} = 14,0 \text{ m/s} = 50,4 \text{ km/h} \quad \text{όταν το αυτοκίνητο κινείται προς την θετική } s\text{-διεύθυνση.}$$

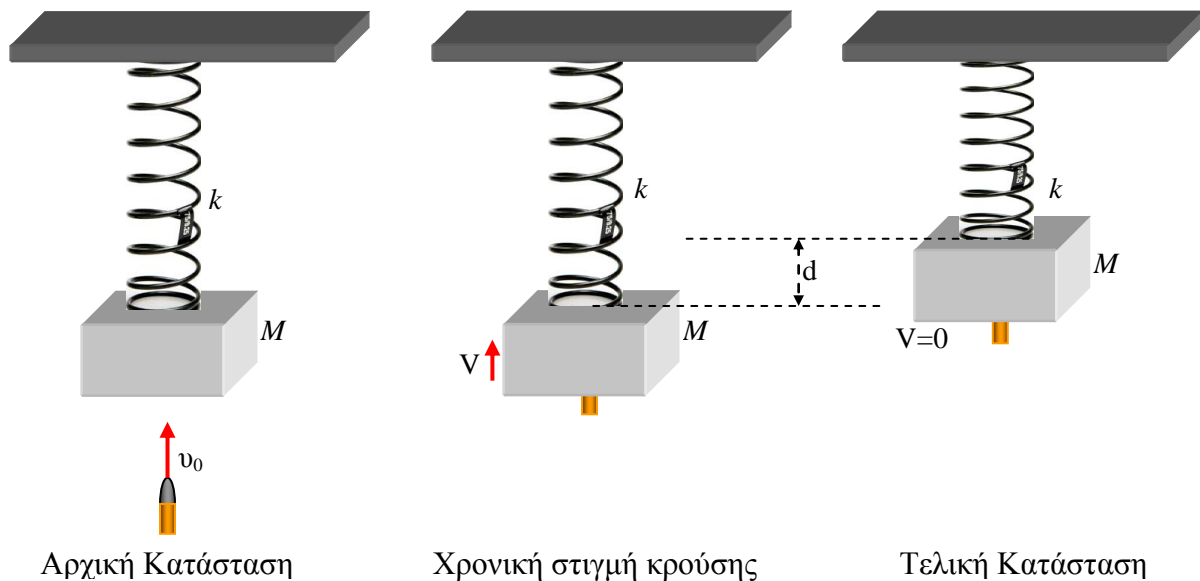
και  $v_{2,\max} = -63,0 \text{ m/s} = -227 \text{ km/h}$  όταν το αυτοκίνητο κινείται προς την αρνητική  $s$ -διεύθυνση.



## ΑΣΚΗΣΗ 12

Σας ζητήθηκε να σχεδιάσετε ένα "βαλλιστικό σύστημα ελατηρίου" για να μετρήσετε τις ταχύτητες των σφαιρών ενός όπλου. Το σύστημα αυτό αποτελείται από ένα ελατήριο με σταθερά  $k=50,0 \text{ N/m}$  το οποίο είναι αναρτημένο κατακόρυφα στην οροφή της αίθουσας δοκιμών. Στο κάτω άκρο του ελατηρίου είναι αναρτημένο ένα κομμάτι ξύλο που έχει μάζα  $M=2,0 \text{ kg}$ . Το όπλο τοποθετείται ακριβώς κάτω από το ξύλο και η σφαίρα που έχει μάζα  $m=10 \text{ g}$  βάλλεται κατακόρυφα προς τα πάνω έτσι ώστε αυτή να ενσωματώνεται μέσα στο ξύλο. Σε μια τέτοια δοκιμή, με την ενσωμάτωση της σφαίρας μέσα στο ξύλο, το ελατήριο συμπιέζεται κατά διάστημα  $d=45 \text{ cm}$ . Να προσδιορίσετε τη σχέση που συνδέει την αρχική ταχύτητα  $v_0$  της σφαίρας με τις γνωστές παραμέτρους  $m$ ,  $M$ ,  $k$  και  $d$ .

## ΛΥΣΗ



Το σύστημα που μελετάμε περιλαμβάνει τη σφαίρα και τη μάζα  $M$  που είναι αναρτημένη στο ελατήριο. Η αρχική κατάσταση αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή λίγο πριν λάβει χώρα η κρούση της σφαίρας με το ξύλο. Η αρχική ορμή  $J_{\text{αρχ}}$  του συστήματος οφείλεται αποκλειστικά στην κίνηση της σφαίρας.

$$\text{Αρχική ορμή συστήματος: } J_{\text{αρχ}} = m v_0 \quad (12.1)$$

Αμέσως μετά την κρούση η σφαίρα ήδη έχει ενσωματωθεί στο ξύλο και το σύστημα ξύλο-σφαίρα θα αρχίσει να κινείται προς τα πάνω με ταχύτητα  $V$ . Τη χρονική στιγμή της κρούσης, η ορμή του συστήματος ξύλο-σφαίρα  $J_{\text{τελ}}$  θα είναι:

$$\text{Χρονική στιγμή κρούσης: } J_{\text{τελ}} = (M + m)V \quad (12.2)$$

$$\text{Αρχή διατήρησης της ορμής: } J_{\text{αρχ}} = J_{\text{τελ}} \Rightarrow m v_0 = (M + m)V \Rightarrow V = \frac{m}{M + m} v_0$$

Εξ αιτίας της ταχύτητας  $V$ , το σύστημα ξύλο-σφαίρα ωθείται προς τα πάνω συμπιέζοντας το ελατήριο. Επειδή η μάζα  $m=10 \text{ g}$  της σφαίρας είναι πολλές φορές μικρότερη από τη μάζα  $M=2,0 \text{ kg}$  του ξύλου (η μάζα της σφαίρας είναι μικρότερη από την ακρίβεια μέτρησης της μάζας του ξύλου), μπορούμε να γράψουμε  $M+m \approx M$ . Οπότε, η τελευταία σχέση που δίνει την αρχική ταχύτητα του συστήματος ξύλο-σφαίρα γίνεται:

$$V = \frac{m}{M} v_0 \quad (12.3)$$

Τη στιγμή της κρούσης, το σύστημα ξύλο-σφαίρα έχει κινητική ενέργεια:

$$K = \frac{1}{2} M V^2 = \frac{1}{2} M \frac{m^2}{M^2} v_0^2 \Rightarrow K = \frac{m^2 v_0^2}{2M} \quad (12.4)$$

Όπως ήδη αναφέραμε, η μάζα ωθείται προς τα πάνω συμπιέζοντας το ελατήριο. Στο διάστημα  $d=45\text{cm}$  στο οποίο συμπιέζεται το ελατήριο, η δυναμική του ενέργεια θα είναι ίση με την αρχική κινητική ενέργεια του συστήματος ξύλο-σφαίρα:

Τελική κατάσταση συστήματος ξύλου-σφαίρας.

$$\text{Δυναμική ενέργεια ελατηρίου : } U_{sp} = \frac{1}{2} k d^2 \quad (12.5)$$

$$\text{Αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας: } K = U_{sp} \Rightarrow \frac{m^2 v_0^2}{2M} = \frac{1}{2} k d^2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{k M d^2}{m^2}}$$

$$\text{Οπότε: } v_0 = \sqrt{\frac{k M d^2}{m^2}} = \sqrt{\frac{(50\text{N/m}) \times (2,0\text{kg}) \times (0,45\text{m})^2}{(0,010\text{kg})^2}} \Rightarrow v_0 = 450\text{m/s}$$

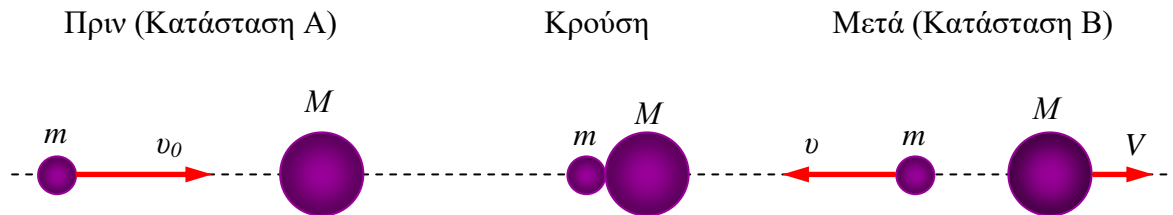
### ΑΣΚΗΣΗ 13

Μια σφαίρα μάζας  $m$  η οποία έχει ταχύτητα  $v$  συγκρούεται μετωπικά και τελείως ελαστικά με μια άλλη σφαίρα η οποία έχει μάζα  $M$  και η οποία αρχικά ήταν ακίνητη. Να δείξετε ότι η μεταβολή  $\Delta K$  της κινητικής ενέργειας της σφαίρας με μάζα  $m$  θα δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta K = \frac{4mM}{(M+m)^2} \kappa_0$$

όπου  $\kappa_0$  είναι η αρχική κινητική ενέργεια της μάζας  $m$ .

### ΛΥΣΗ



	Πριν από την κρούση	Μετά από την κρούση
Ορμής σφαίρας με μάζα $m$ :	$p_0 = mv_0$	$p = -mv$
Κινητική ενέργεια σφαίρας με μάζα $m$ :	$\kappa_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$	$\kappa = \frac{1}{2}mv^2$
Ορμής σφαίρας με μάζα $M$ :	$P_0 = 0$	$P = MV$
Κινητική ενέργεια σφαίρας με μάζα $M$ :	$K_0 = 0$	$K = \frac{1}{2}MV^2$

#### Διατήρηση της ορμής:

$$p_0 = p + P \Rightarrow mv_0 = -mv + MV \Rightarrow mv_0 + mv = MV \Rightarrow m(v_0 + v) = MV$$
$$v_0 + v = \frac{M}{m}V \quad (1)$$

#### Διατήρηση της Ενέργειας:

$$\kappa_0 + K_0 = \kappa + K \Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 \Rightarrow mv_0^2 - mv^2 = MV^2 \Rightarrow$$
$$m(v_0^2 - v^2) = MV^2 \Rightarrow m(v_0 - v)(v_0 + v) = MV^2 \quad (2)$$

Διαιρώντας κατά μήλη τις Εξισώσεις 1 και 2 βρίσκουμε:

$$v_0 - v = V \quad (3)$$

Οι Εξισώσεις 1 και 3 αποτελούν ένα σύστημα 2 εξισώσεων με δυο αγνώστων. Λύση του συστήματος αυτού δίνει:

$$V = \frac{2m}{M+m}v_0 \quad (4)$$

$$v = \frac{M-m}{M+m}v_0 \quad (5)$$

Αρχική κινητική ενέργεια σφαίρας με μάζα  $m$ :  $\kappa_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$

Τελική κινητική ενέργεια σφαίρας με μάζα  $m$ :  $\kappa_1 = \frac{1}{2}mv^2$

Μεταβολή κινητική ενέργεια σφαίρας με μάζα  $m$ :  $\Delta K = \kappa_0 - \kappa_1 = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv^2$

Η ενέργεια  $\Delta K$  μεταφέρθηκε στην αρχικά ακίνητη σφαίρα με μάζα  $M$  η οποία απέκτησε ταχύτητα  $V$ . Οπότε, η κινητική ενέργεια της σφαίρας με μάζα  $M$  θα είναι ίση με:

$$\Delta K = \frac{1}{2}MV^2$$

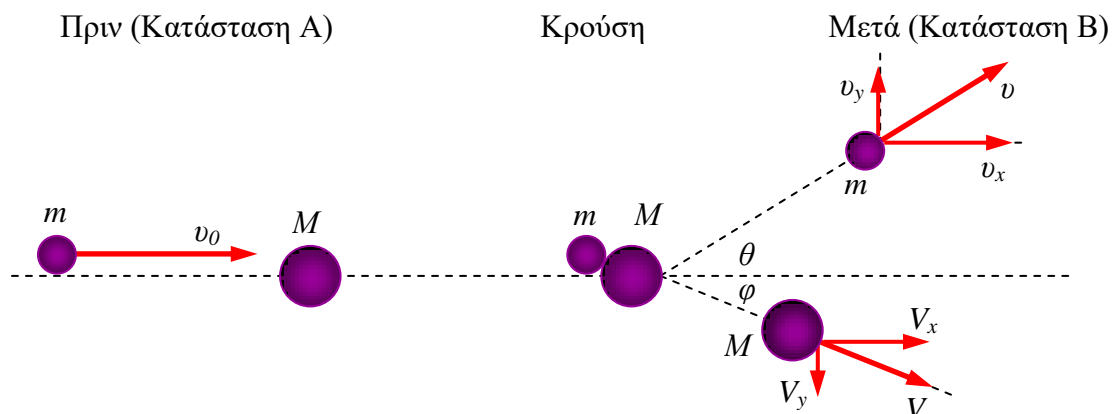
Η τελευταία Εξίσωση, σε συνδυασμό με την Εξίσωση 4, γίνεται:

$$\Delta K = \frac{1}{2}M\left(\frac{2m}{M+m}v_0\right)^2 = \frac{4mM}{(M+m)^2}\frac{1}{2}mv_0^2 \Rightarrow \Delta K = \frac{4mM}{(M+m)^2}\kappa_0$$

## ΑΣΚΗΣΗ 14

Μια μάζα  $m$  κινείται με ταχύτητα  $v_0$  παράλληλα με τη διεύθυνση  $x$  και συγκρούεται τελείως ελαστικά με ακίνητη μάζα  $M$ . Να αποδείξετε ότι η μέγιστη απώλεια κινητικής ενέργειας της μάζας  $m$  συμβαίνει όταν η κρούση είναι μετωπική (κεντρική).

## ΛΥΣΗ



Θεωρούμε ότι μετά από μια τυχαία μη μετωπική τελείως ελαστική κρούση, η μάζα  $m$  έχει ταχύτητα  $v$  η οποία σχηματίζει γωνία  $+\theta$  με τον άξονα  $x$  και η μάζα  $M$  έχει ταχύτητα  $V$  που σχηματίζει γωνία  $-\phi$  με τον άξονα  $x$ . Οι ποσότητες  $\theta$  και  $\phi$  είναι θετικοί αριθμοί.

	Πριν από την κρούση	Μετά από την κρούση
Ορμής σφαίρας με μάζα $m$ :	$\vec{p}_0 = mv_0\hat{i}$	$\vec{p} = p_x\hat{i} + p_y\hat{j}$
Κινητική ενέργεια σφαίρας με μάζα $m$ :	$\kappa_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$	$\kappa = \frac{1}{2}mv^2$
Ορμής σφαίρας με μάζα $M$ :	$P_0 = 0$	$\vec{P} = P_x\hat{i} + P_y\hat{j}$
Κινητική ενέργεια σφαίρας με μάζα $M$ :	$K_0 = 0$	$K = \frac{1}{2}MV^2$

**Μετά από την κρούση:**

$$\Delta K = \kappa_0 - \kappa \Rightarrow \Delta K = \frac{1}{2}m(v_0^2 - v^2) \quad (1)$$

Συνιστώσα x της ορμής της μάζας m:  $p_x = mv_x = mv\cos\theta$

Συνιστώσα y της ορμής της μάζας m:  $p_y = mv_y = mv\sin\theta$

Διάνυσμα της ορμής της μάζας m:  $\vec{p} = p_x\hat{i} + p_y\hat{j} = (mv\cos\theta)\hat{i} + (mv\sin\theta)\hat{j}$  (2)

Συνιστώσα x της ορμής της μάζας M:  $P_x = MV_x = MV\cos\varphi$

Συνιστώσα y της ορμής της μάζας M:  $P_y = MV_y = -MV\sin\varphi$

Διάνυσμα της ορμής της μάζας m:  $\vec{P} = P_x\hat{i} + P_y\hat{j} = (MV\cos\varphi)\hat{i} - (MV\sin\varphi)\hat{j}$  (3)

### Διατήρηση της Ορμής:

$$\vec{p}_0 = \vec{p} + \vec{P} \Rightarrow mv_0\hat{i} = (mv\cos\theta)\hat{i} + (mv\sin\theta)\hat{j} + (MV\cos\varphi)\hat{i} - (MV\sin\varphi)\hat{j} \Rightarrow$$

$$mv_0\hat{i} = [(mv\cos\theta) + (MV\cos\varphi)]\hat{i} + [(mv\sin\theta) - (MV\sin\varphi)]\hat{j} \Rightarrow$$

$$mv_0 = (mv\cos\theta) + (MV\cos\varphi) \quad (4)$$

$$0 = (mv\sin\theta) - (MV\sin\varphi) \quad (5)$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο τις Εξισώσεις 4 και 5 και μετά τις αθροίζουμε κατά μέλη:

$$m^2v_0^2 = m^2v^2\cos^2\theta + M^2V^2\cos^2\varphi + 2mvMV\cos\theta\cos\varphi$$

$$0 = m^2v^2\sin^2\theta + M^2V^2\sin^2\varphi - 2mvMV\sin\theta\sin\varphi \quad +$$

$$m^2v_0^2 = m^2v^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + M^2V^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) +$$

$$+ 2mvMV(\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi) \Rightarrow$$

$$m^2v_0^2 = m^2v^2 + M^2V^2 + 2mvMV\cos(\theta + \varphi) \Rightarrow$$

$$m^2v_0^2 - m^2v^2 = M^2V^2 + 2mvMV\cos(\theta + \varphi) \Rightarrow$$

$$m(v_0^2 - v^2) = M^2V^2 + 2mvMV\cos(\theta + \varphi) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m(v_0^2 - v^2) = \frac{M^2V^2}{2m} + vMV\cos(\theta + \varphi) \quad (6)$$

Από τις Εξισώσεις 1 και 6 παίρνουμε:

$$\Delta K = \frac{M^2V^2}{2m} + vMV\cos(\theta + \varphi) \quad (7)$$

Για να είναι η μεταβολή  $\Delta K$  της κινητικής ενέργειας της μάζας m μέγιστη, θα πρέπει η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης  $\Delta K = f(\theta + \varphi)$  να είναι ίση με μηδέν και η δεύτερη παράγωγος (στην τιμή που μηδενίζετε η πρώτη παράγωγος) να είναι αρνητική.

Παίρνουμε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης  $\Delta K = f(\Theta)$  ως προς  $\Theta$ , όπου  $\Theta = \theta + \varphi$ :

$$\frac{d(\Delta K)}{d\Theta} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\Theta} \left( \frac{M^2V^2}{2m} \right) + \frac{d}{d\Theta} [vMV\cos(\Theta)] = 0 \Rightarrow vMV \frac{d}{d\Theta} [\cos(\Theta)] = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d(\Delta K)}{d\theta} = -vMV \sin(\theta) = 0 \Rightarrow \theta = 0 \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \theta + \varphi = 0 \quad (8)$$

Η Εξίσωση 8 μας λέει ότι η μεταβολή  $\Delta K$  της κινητικής ενέργειας έχει ακρότατο (είναι μέγιστη ή ελάχιστη) όταν  $\Theta = \theta + \varphi = 0$ .

Παρατηρούμε ότι, όταν  $\Theta = 0$ , η δεύτερη παράγωγος της  $\Delta K$  είναι:

$$\frac{d^2(\Delta K)}{d\theta^2} = -vMV \cos(\theta) = -vMV \cos(0) = -vMV < 0$$

Συνεπώς, η  $\Delta K$  είναι μέγιστη όταν  $\Theta = \theta + \varphi = 0$

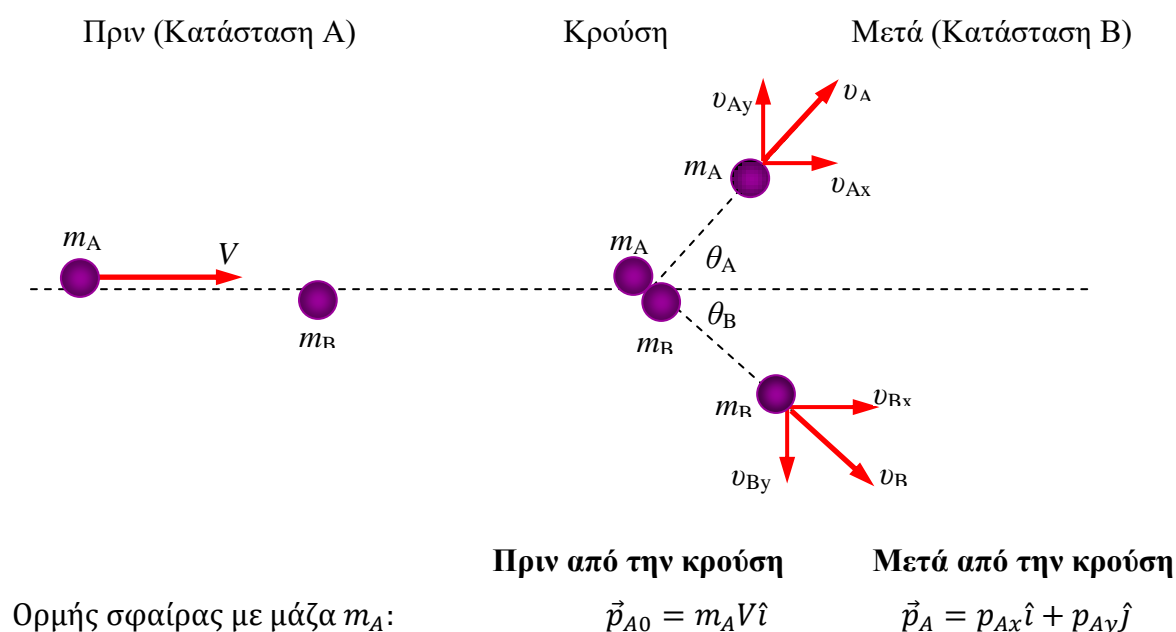
Και επειδή οι ποσότητες  $\theta$  και  $\varphi$  είναι εξ ορισμού θετικές ποσότητες, για να είναι το άθροισμά τους μηδέν θα πρέπει  $\theta = \varphi = 0$ . Στην περίπτωση αυτή, η κρούση είναι μετωπική (κεντρική).

## ΑΣΚΗΣΗ 15

Μια ατσάλινη μπίλια που έχει μάζα  $m_A$  κινείται με ταχύτητα  $v_0$  παράλληλα με την θετική  $x$ -κατεύθυνση, συγκρούεται τελείως ελαστικά και όχι μετωπικά με μια άλλη πανομοιότυπη αλλά ακίνητη μπίλια που έχει μάζα  $m_B = m_A$ . Μετά την κρούση, η πρώτη μπίλια κινείται με ταχύτητα  $v_A$  η κατεύθυνση της οποίας σχηματίζει γωνία  $\theta_A$  με τον άξονα  $x$ , ενώ η δεύτερη μπίλια κινείται με ταχύτητα  $v_B$  η κατεύθυνση της οποίας σχηματίζει γωνία  $\theta_B$  με τον άξονα  $x$ . Να αποδείξετε ότι  $\theta_A + \theta_B = \pi/2$ .

## ΛΥΣΗ

Θεωρούμε ότι μετά από μια τυχαία μη μετωπική τελείως ελαστική κρούση, η μάζα  $m_A$  έχει ταχύτητα  $v_A$  η οποία σχηματίζει γωνία  $+\theta_A$  με τον άξονα  $x$  και η μάζα  $m_B$  έχει ταχύτητα  $v_B$  που σχηματίζει γωνία  $-\theta_B$  με τον άξονα  $x$ .



Κινητική ενέργεια σφαίρας με μάζα $m_A$ :	$K_{A0} = \frac{1}{2} m_A V^2$	$K_A = \frac{1}{2} m_A v_A^2$
Ορμής σφαίρας με μάζα $m_B$ :	$p_{B0} = 0$	$\vec{p}_B = p_{Bx}\hat{i} + p_{By}\hat{j}$
Κινητική ενέργεια σφαίρας με μάζα $m_B$ :	$K_{B0} = 0$	$K_B = \frac{1}{2} m_B v_B^2$

**Μετά από την κρούση:**

Διατήρηση της Ενέργειας:  $K_{A0} = K_A + K_B \Rightarrow \frac{1}{2} m_A V^2 = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 \Rightarrow$   
 $V^2 = v_A^2 + v_B^2 \quad (1)$

Η απλοποίηση έγινε επειδή  $m_A = m_B$ .

Συνιστώσα  $x$  της ορμής της μάζας  $m_A$ :  $p_{Ax} = m_A v_{Ax} = m_A v_A \cos \theta_A$

Συνιστώσα  $y$  της ορμής της μάζας  $m_A$ :  $p_{Ay} = m_A v_{Ay} = m_A v_A \sin \theta_A$

Διάνυσμα της ορμής της μάζας  $m_A$ :

$$\vec{p}_A = p_{Ax}\hat{i} + p_{Ay}\hat{j} = (m_A v_A \cos \theta_A)\hat{i} + (m_A v_A \sin \theta_A)\hat{j} \quad (2)$$

Συνιστώσα  $x$  της ορμής της μάζας  $m_B$ :  $p_{Bx} = m_B v_x = m_A v_B \cos \theta_B$

Συνιστώσα  $y$  της ορμής της μάζας  $m_B$ :  $p_{By} = m_B v_y = -m_B v_B \sin \theta_B$

Διάνυσμα της ορμής της μάζας  $m_B$ :

$$\vec{p}_B = p_{Bx}\hat{i} + p_{By}\hat{j} = (m_B v_B \cos \theta_B)\hat{i} - (m_B v_B \sin \theta_B)\hat{j} \quad (3)$$

**Διατήρηση της Ορμής:**

$$\vec{p}_{A0} = \vec{p}_A + \vec{p}_B \Rightarrow$$

$$m_A V \hat{i} = (m_A v_A \cos \theta_A)\hat{i} + (m_A v_A \sin \theta_A)\hat{j} + (m_B v_B \cos \theta_B)\hat{i} - (m_B v_B \sin \theta_B)\hat{j} \Rightarrow$$

$$m_A V \hat{i} = [(m_A v_A \cos \theta_A) + (m_B v_B \cos \theta_B)]\hat{i} + [(m_A v_A \sin \theta_A) - (m_B v_B \sin \theta_B)]\hat{j} \Rightarrow$$

$$m_A V = (m_A v_A \cos \theta_A) + (m_B v_B \cos \theta_B) \Rightarrow V = (v_A \cos \theta_A) + (v_B \cos \theta_B) \quad (4)$$

$$0 = (m_A v_A \sin \theta_A) - (m_B v_B \sin \theta_B) \Rightarrow 0 = (v_A \sin \theta_A) - (v_B \sin \theta_B) \quad (5)$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο τις Εξισώσεις 4 και 5 και μετά τις αθροίζουμε κατά μέλη:

$$V^2 = v_A^2 \cos^2 \theta_A + v_B^2 \cos^2 \theta_B + 2v_A v_B \cos \theta_A \cos \theta_B$$

$$0 = v_A^2 \sin^2 \theta_A + v_B^2 \sin^2 \theta_B - 2v_A v_B \sin \theta_A \sin \theta_B +$$

$$V^2 = v_A^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + v_B^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + 2v_A v_B (\cos \theta \cos \theta - \sin \theta \sin \theta) \Rightarrow$$

$$V^2 = v_A^2 + v_B^2 + 2v_A v_B \cos(\theta_A + \theta_B) \quad (6)$$

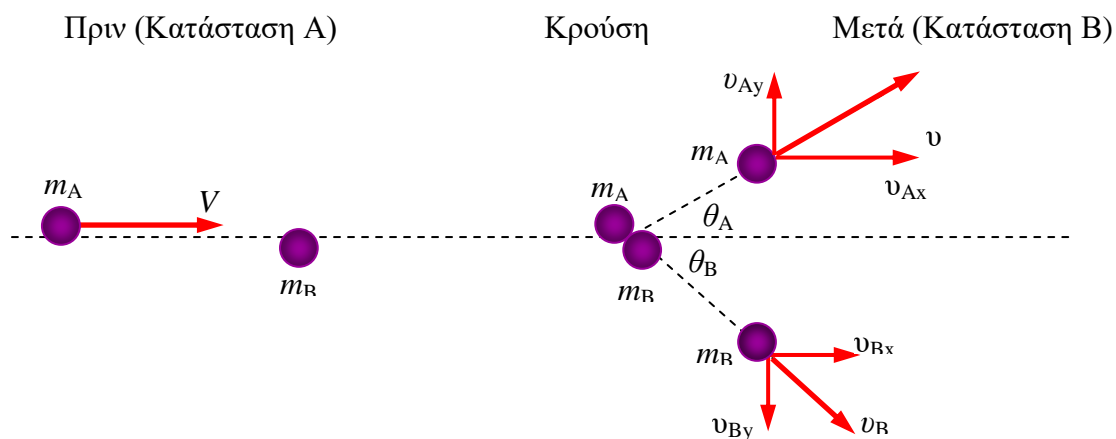
Από το συνδυασμό των Εξισώσεων 1 και 6 προκύπτει ότι:

$$2v_A v_B \cos(\theta_A + \theta_B) = 0 \Rightarrow \cos(\theta_A + \theta_B) = 0 \Rightarrow \theta_A + \theta_B = \frac{\pi}{2}$$

## ΑΣΚΗΣΗ 16

Ένας δίσκος του χόκεϊ με μάζα  $m$ , τον οποίο συμβολίζουμε με B, είναι ακίνητος πάνω σε λεία επιφάνεια πάγου. Ένας δεύτερος δίσκος με ίδια μάζα  $m$ , ο οποίος συμβολίζεται με A και ο οποίος κινείται με ταχύτητα  $V = 40,0 \text{ m/s}$  παράλληλα με τη διεύθυνση  $x$ , συγκρούεται όχι ελαστικά με τον ακίνητο δίσκο B. Μετά την κρούση, οι δίσκοι A και B κινούνται προς κατευθύνσεις που σχηματίζουν γωνίας  $\theta_A = 30,0^\circ$  και  $\theta_B = 45,0^\circ$  ως προς τη διεύθυνση  $x$ . Να υπολογίσετε: (α) τις ταχύτητες των δυο δίσκων μετά από την κρούση και (β) Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του δίσκου A που χάνεται κατά την κρούση.

## ΛΥΣΗ



Θεωρούμε ότι μετά από μια τυχαία μη μετωπική μη ελαστική κρούση, η μάζα  $m_A$  έχει ταχύτητα  $v_A$  η οποία σχηματίζει γωνία  $+\theta_A$  με τον άξονα  $x$  και η μάζα  $m_B$  έχει ταχύτητα  $v_B$  που σχηματίζει γωνία  $-\theta_B$  με τον άξονα  $x$ . Οι ποσότητες  $\theta_A$  και  $\theta_B$  είναι θετικοί αριθμοί.

	Πριν από την κρούση	Μετά από την κρούση
Ορμής σφαίρας με μάζα $m_A$ :	$\vec{p}_{A0} = m_A V \hat{i}$	$\vec{p}_A = p_{Ax} \hat{i} + p_{Ay} \hat{j}$
Κινητική ενέργεια σφαίρας με μάζα $m_B$ :	$K_{A0} = \frac{1}{2} m_A V^2$	$K_A = \frac{1}{2} m_A v_A^2$
Ορμής σφαίρας με μάζα $m_B$ :	$p_{B0} = 0$	$\vec{p}_B = p_{Bx} \hat{i} + p_{By} \hat{j}$
Κινητική ενέργεια σφαίρας με μάζα $m_B$ :	$K_{B0} = 0$	$K_B = \frac{1}{2} m_B v_B^2$

### Μετά από την κρούση:

Συνιστώσα  $x$  της ορμής της μάζας  $m_A$ :  $p_{Ax} = m_A v_{Ax} = m_A v_A \cos \theta_A$

Συνιστώσα  $y$  της ορμής της μάζας  $m_A$ :  $p_{Ay} = m_A v_{Ay} = m_A v_A \sin \theta_A$

Διάνυσμα της ορμής της μάζας  $m_A$ :

$$\vec{p}_A = p_{Ax} \hat{i} + p_{Ay} \hat{j} = (m_A v_A \cos \theta_A) \hat{i} + (m_A v_A \sin \theta_A) \hat{j} \quad (2)$$



Συνιστώσα x της ορμής της μάζας  $m_B$ :  $p_{Bx} = m_B v_x = m_A v_B \cos \theta_B$

Συνιστώσα y της ορμής της μάζας  $m_B$ :  $p_{By} = m_B v_y = -m_B v_B \sin \theta_B$

Διάνυσμα της ορμής της μάζας  $m$ :

$$\vec{p}_B = p_{Bx}\hat{i} + p_{By}\hat{j} = (m_B v_B \cos \theta_B)\hat{i} - (m_B v_B \sin \theta_B)\hat{j} \quad (3)$$

**Διατήρηση της Ορμής:**

$$\vec{p}_{A0} = \vec{p}_A + \vec{p}_B \Rightarrow$$

$$m_A V \hat{i} = (m_A v_A \cos \theta_A)\hat{i} + (m_A v_A \sin \theta_A)\hat{j} + (m_B v_B \cos \theta_B)\hat{i} - (m_B v_B \sin \theta_B)\hat{j} \Rightarrow$$

$$m_A V \hat{i} = [(m_A v_A \cos \theta_A) + (m_B v_B \cos \theta_B)]\hat{i} + [(m_A v_A \sin \theta_A) - (m_B v_B \sin \theta_B)]\hat{j} \Rightarrow$$

$$m_A V = (m_A v_A \cos \theta_A) + (m_B v_B \cos \theta_B) \Rightarrow V = (v_A \cos \theta_A) + (v_B \cos \theta_B) \quad (4)$$

$$0 = (m_A v_A \sin \theta_A) - (m_B v_B \sin \theta_B) \Rightarrow 0 = (v_A \sin \theta_A) - (v_B \sin \theta_B) \quad (5)$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των γωνιών στις Εξισώσεις 4 και 5 παίρνουμε το σύστημα:

$$V = (v_A \cos(30,0) + (v_B \cos(45,0))) \Rightarrow V = \frac{\sqrt{3}}{2} v_A + \frac{\sqrt{2}}{2} v_B \quad (6)$$

$$0 = (v_A \sin(30,0) - (v_B \sin(45,0))) \Rightarrow 0 = \frac{1}{2} v_A - \frac{\sqrt{2}}{2} v_B \quad (7)$$

(α) **Υπολογισμός ταχυτήτων  $v_A$  και  $v_B$ :**

Προσθέτουμε κατά μέλη τις Εξισώσεις 6 και 7:

$$V = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} v_A \Rightarrow v_A = \frac{2}{\sqrt{3} + 1} V = \frac{2}{\sqrt{3} + 1} \left(40,0 \frac{m}{s}\right) \Rightarrow v_A = 14,6 \text{ m/s}$$

Από την Εξίσωση 7 παίρνουμε:

$$\frac{1}{2} v_A = \frac{\sqrt{2}}{2} v_B \Rightarrow v_B = \frac{1}{\sqrt{2}} v_A = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(14,6 \frac{m}{s}\right) \Rightarrow v_B = 10,3 \text{ m/s}$$

(β) **Υπολογισμός του ποσοστού απώλειας της αρχικής ενέργειας:**

Ποσοστό απώλειας αρχικής ενέργειας:

$$\lambda(\%) = \frac{K_{A0} - K_A}{K_{A0}} = \frac{\frac{1}{2} m_A V^2 - \frac{1}{2} m_A v_A^2 - \frac{1}{2} m_B v_B^2}{\frac{1}{2} m_A V^2} \times 100 = \frac{V^2 - v_A^2 - v_B^2}{V^2} \times 100 \Rightarrow$$

$$\lambda(\%) = \frac{V^2 - v_A^2 - v_B^2}{V^2} \times 100 = \frac{(40,0 \frac{m}{s})^2 - (14,6 \frac{m}{s})^2 - (10,3 \frac{m}{s})^2}{(40,0 \frac{m}{s})^2} \times 100 \Rightarrow$$

$$\lambda(\%) = 80,0\%$$