

Lösung zu Übungsblatt 2

Aufgabe 1:

- i) Für welches $n \in \mathbb{N}$ gilt: $4^n < n!$ (*Hinweis:* Taschenrechner erlaubt!)

Lösung: Man rechnet nach, dass die Aussage $A(n) : 4^n < n!$ falsch ist, wenn $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ und wahr ist für $n = 9$, weil $262144 = 4^9 < 9! = 362880$.

Wir starten nun mit dem Induktionsbeweis bei $n_0 = 9$:

- **Induktionsanfang:** $n_0 = 9$: $262144 = 4^9 < 9! = 362880$. Also gilt $A(9)$.

- **Induktionsschritt:** Sei $n \geq 9$ und $A(n) : 4^n < n!$ wahr.

Wir möchten die Aussage $A(n+1) : 4^{n+1} < (n+1)!$ nun herleiten. Hierzu gilt

$$\begin{aligned} (n+1)! &= (n+1) \cdot n! > (n+1) \cdot 4^n && \text{nach Induktionsvoraussetzung} \\ &> 4 \cdot 4^n = 4^{n+1} && \text{weil } n+1 > n \geq 9 \geq 4 \end{aligned}$$

Also ist $A(n+1)$ wahr.

- **Induktionsschluss:** Somit gilt nach dem Prinzip der Vollständige Induktion, dass $A(n)$ für alle $n \geq 9$ wahr ist.

- ii) Bestimme alle reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$, so dass $||x - 10| + 2x| = 20$.

Lösung: Wir bekommen 4 Gleichungen:

$$x - 10 = 2x + 20, x - 10 = 2x - 20, x - 10 = -2x + 20, x - 10 = -2x - 20$$

Oder etwas kompakter: $x - 10 = \pm 2x \pm 20$, wobei alle 4 Kombinationen der Vorzeichen möglich sind. Wir erhalten dann 4 Lösungen (wobei, 2 gleich sind!)

$$x = -30, 10, 10, -\frac{10}{3}.$$

Man prüft, dass nur $x = 10, -30$ die Bedingung erfüllen.

Aufgabe 2: Entscheide, ob die folgenden Mengen in $\mathbb{R}$ ein Minimum, Infimum, Supremum oder Maximum haben und gib diese gegebenenfalls an:

a) $X := \left\{ \frac{1}{m} + \frac{1}{n} : n, m \in \mathbb{N} \right\}$

Lösung: Da $0 < \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq 2$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ ist 0 eine untere Schranke.

Da $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \right) = 0$ ist 0 die grösste untere Schranke. Somit ist $\inf(X) = 0 \notin X$ und X besitzt kein Minimum. Andererseits ist $2 \in X$ eine obere Schranke und somit ist $\sup(X) = \max(X) = 2$.

b) $Y := \left\{ \frac{1}{m} - \frac{1}{n^2} : n, m \in \mathbb{N} \right\}$

Lösung: Es gilt

$$-1 \leq -\frac{1}{n^2} < \frac{1}{m} - \frac{1}{n^2} < \frac{1}{m} \leq 1.$$

Da $\frac{1}{n^2}$ beliebig klein wird, gilt dann $\sup(Y) = 1$. Andererseits, mit $\frac{1}{m}$ beliebig klein gewählt, sieht man dass $\inf(Y) = -1$. Somit existiert weder ein Maximum noch ein Minimum in Y .

$$c) \ Z := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left] -\frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{2^n} \right[$$

Lösung: Es ist $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left] -\frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{2^n} \right[= \left[0, 2 - \frac{1}{2} \right[= \left[0, \frac{3}{2} \right[$. Also $\inf(Z) = 0 = \min(Z)$ und $\sup(Z) = \frac{3}{2} \notin Z$, so dass es kein Maximum gibt.

Aufgabe 3: Entscheide ob diese Folgen konvergieren und bestimme gegebenenfalls diesen Grenzwert:

$$a) \ \left(\frac{(-1)^n}{n^2} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

Lösung: Es gilt $\frac{-1}{n^2} \leq \frac{(-1)^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{n^2} = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}$. Also nach dem Sandwich-Kriterium folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = 0.$$

$$b) \ \left(\frac{(-1)^n}{n^2 + 2n + 1} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

Lösung: Es ist: $\frac{(-1)^n}{n^2 + 2n + 1} = \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$ und es gilt

$$-\frac{1}{n^2} \leq \frac{-1}{(n+1)^2} \leq \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

Also nach Sandwich-Kriterium folgt ebenfalls, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 2n + 1} = 0$.

$$c) \ \left(\frac{n^2}{2^{3n} + n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

Lösung: Wir teilen alle Terme durch $2^{3n} = (2^3)^n = 8^n$. Somit erhält man mit Hilfe der Eigenschaften von Limiten bzgl Summen und Quotienten, dass

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^{3n} + n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2}{8^n}}{\frac{2^{3n}}{8^n} + \frac{n}{8^n}} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{8^n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^{3n}}{8^n} + \frac{n}{8^n} \right)} \\ &= \frac{0}{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 0)} = 0 \end{aligned}$$

Wobei im vorletzten Schritt haben wir benutzt dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{8^n} = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{8^n}$ wegen Satz 4.1.16 aus dem Skriptum.

$$d) \ \left(\frac{2n^3 + (-1)^n n^2 + 1}{n^3 + n^2 + 4} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

Lösung: Wir teilen alle Terme durch n^3 . So gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + (-1)^n n^2 + 1}{n^3 + n^2 + 4} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n^3/n^3) + (-1)^n n^2/n^3 + 1/n^3}{n^3/n^3 + n^2/n^3 + 4/n^3} && \text{Durch } n^3 \text{ teilen} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + (-1)^n/n + 1/n^3}{1 + 1/n + 4/n^3} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (2 + (-1)^n/n + 1/n^3)}{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n + 4/n^3)} && \text{Quotient} \\ &= \frac{2 + \lim_{n \rightarrow \infty} ((-1)^n/n) + \lim_{n \rightarrow \infty} (1/n^3)}{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) + 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} (4/n^3)} = \frac{2}{1} = 2. && \text{Summe} \end{aligned}$$

e) $\left(\frac{(-1)^n n^2 + n + 1}{n^2 - 1} \right)_{n \in \mathbb{N}}$

Lösung: Wir wenden den Teilfolgen-Test an, wobei

$$x_n = \frac{(-1)^n n^2 + n + 1}{n^2 - 1} = \frac{(-1)^n + 1/n + 1/n^2}{1 - 1/n^2}.$$

Also betrachte

$$\begin{aligned} x_{2n} &= \frac{(-1)^{2n} + 1/2n + 1/(2n)^2}{1 - 1/(2n)^2} = \frac{1 + 1/2n + 1/(2n)^2}{n^2 - 1} \\ x_{2n+1} &= \frac{(-1)^{2n+1} + 1/(2n+1) + 1/(2n+1)^2}{1 - 1/(2n+1)^2} = \frac{-1 + 1/(2n+1) + 1/(2n+1)^2}{1 - 1/(2n+1)^2} \end{aligned}$$

Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = 1$ aber $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = -1$. Damit konvergiert die Folge x_n nicht nach dem Teilfolgen-Test.

Aufgabe 4: Zeigen Sie, dass die angegebenen Folgen Nullfolgen sind:

a) $x_n = \sqrt{n^2 + 1} - n$. (*Hinweis:* Multipliziere mit $1 = \frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{n^2+1}+n}$)

Lösung: Es gilt mit dem Hinweis

$$x_n = \sqrt{n^2 + 1} - n = \frac{(\sqrt{n^2 + 1} - n)(\sqrt{n^2 + 1} + n)}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = \frac{n^2 + 1 - n^2}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n}$$

Desweiteren gilt $0 = \sqrt{n^2} - n \leq \sqrt{n^2 + 1} - n$. Aber dann gibt es Sandwich-Folgen:

$$0 \leq \sqrt{n^2 + 1} - n \leq \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n} \leq \frac{1}{n}$$

und somit gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 1} - n) = 0$

b) $y_n = \frac{n!}{n^n}$.

Lösung: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $2k$ so groß, dass $(\frac{1}{2})^k < \varepsilon$. Dann für $n \geq 2k$ gilt $\frac{k}{n} \leq \frac{1}{2}$ und somit ist

$$\begin{aligned} \frac{n!}{n^n} &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{n \cdot n \cdot n \cdots n} = \underbrace{\frac{1}{n} \frac{2}{n} \frac{3}{n} \cdots \frac{k}{n}}_{\text{erste } k \text{ Terme}} \frac{k+1}{n} \cdots \frac{n}{n} \\ &\leq \left(\frac{1}{2} \right)^k \cdot \underbrace{\left(\frac{k+1}{n} \cdots \frac{n}{n} \right)}_{\text{restliche Terme alle } \leq 1} \leq \left(\frac{1}{2} \right)^k < \varepsilon. \end{aligned}$$

Somit folgt, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$ und $y_n = \frac{n!}{n^n}$ ist eine Nullfolge.