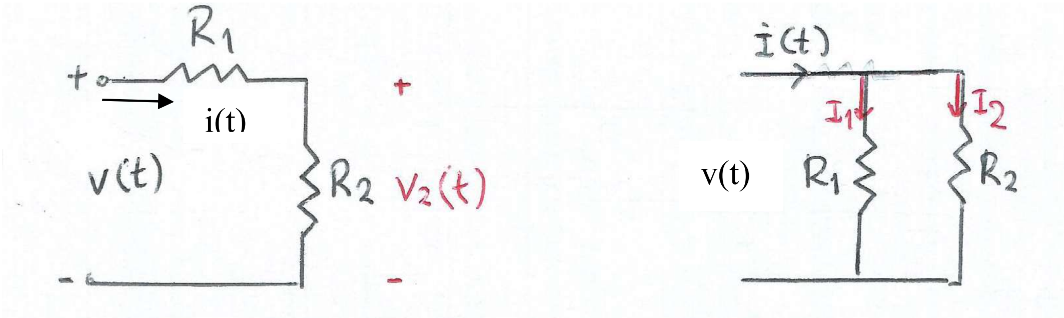
2. ΑΠΛΑ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

2.1. Διαίρεση τάσης και ρεύματος

2.1.1. Γενικά

Για τα απλά κυκλώματα που ακολουθούν, μπορεί να αποδειχθεί ότι

- $v_2(t) = v(t)\dfrac{R_2}{R_1+R_2}$ (διαίρεση **τάσης**)
- $i_2(t) = i(t)\dfrac{R_1}{R_1+R_2}$ (διαίρεση **ρεύματος**)



Απόδειξη για τη διαίρεση **τάσης**

- $v_2(t) = i(t)R_2 = \dfrac{v(t)}{R_1+R_2}R_2 = v(t)\dfrac{R_2}{R_1+R_2}$

Απόδειξη για τη διαίρεση **ρεύματος**

- 1ος τρόπος: $i(t) = i_1(t) + i_2(t) = \dfrac{v(t)}{R_1} + \dfrac{v(t)}{R_2} = v(t)\left[\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right] = v(t)\dfrac{R_2+R_1}{R_1R_2}$

$$\Rightarrow v(t) = i(t)\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$$

$$i_2(t) = \frac{v(t)}{R_2} = i(t)\frac{R_1}{R_1+R_2}$$

- 2ος τρόπος: $i_2(t) = \dfrac{v(t)}{R_2} = \dfrac{i_1(t)R_1}{R_2}$

  Όμως $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$ οπότε $i_1(t) = i(t) - i_2(t)$. Συνεπώς, προκύπτει ότι

$$i_2(t) = \frac{[i(t) - i_2(t)]R_1}{R_2}$$

  Επιλύοντας την παραπάνω εξίσωση, προκύπτει:

$$i_2(t) = \frac{[i(t) - i_2(t)]R_1}{R_2} \Rightarrow \frac{i_2(t)R_2}{R_1} = i(t) - i_2(t) \Rightarrow \frac{i_2(t)R_2}{R_1} + i_2(t) = i(t) \Rightarrow$$

$$[\frac{R_2}{R_1} + 1]i_2(t) = i(t) \Rightarrow \frac{R_1 + R_2}{R_1} i_2(t) = i(t) \Rightarrow i_2(t) = i(t)\frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Για διαίρεση τάσης ή ρεύματος μεταξύ N αντιστάσεων R_1, R_2, …, R_N, οι παραπάνω σχέσεις γενικεύονται ως εξής (n = 1, 2, …, N):

- $v_n(t) = v(t)\dfrac{R_n}{R_1 + R_2 + ... + R_N}$ (διαίρεση **τάσης**)
- $i_n(t) = i(t)\dfrac{\frac{1}{R_n}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + ... + \frac{1}{R_N}}$ (διαίρεση **ρεύματος**) [1]

[1] Για διαίρεση ρεύματος μεταξύ 2 αντιστάσεων, η γενική σχέση μεταπίπτει στη σχέση που είχε αποδειχθεί παραπάνω. Πράγματι, για n = 2 (και για N = 2 συνολικά αντιστάσεις), η γενική σχέση δίνει

$$i_2(t) = i(t)\frac{\frac{1}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = i(t)\frac{\frac{1}{R_2}}{\frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2}} = i(t)\frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

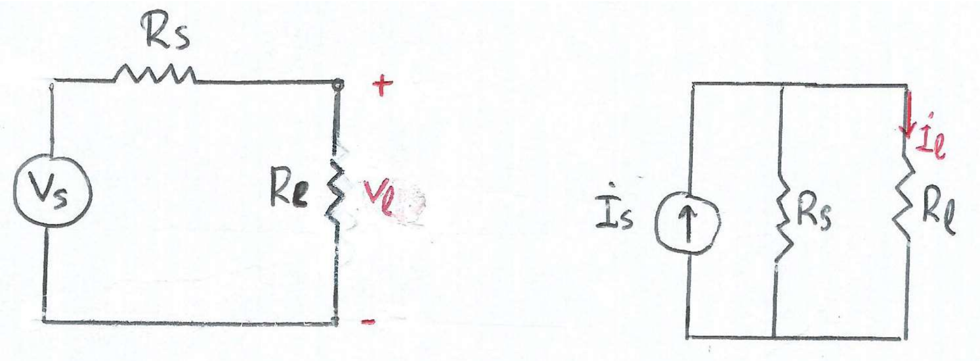
(η σχέση που είχε αποδειχθεί παραπάνω).

2.1.2. Χαρακτηρισμός πηγών τάσης και ρεύματος

Εφαρμόζοντας τις παραπάνω σχέσεις για **πηγή τάσης** $v_S(t)$ ή **πηγή ρεύματος** $i_S(t)$ με εσωτερική αντίσταση R_S συνδεδεμένη με αντίσταση φορτίου R_ℓ, προκύπτει ότι

$$v_\ell(t) = v_S(t)\ \frac{R_\ell}{R_S + R_\ell}$$

$$i_\ell(t) = i_S(t)\ \frac{R_S}{R_S + R_\ell}$$



Από τις παραπάνω σχέσεις, προκύπτει ότι:

- Για σύνδεση αντίστασης φορτίου με **πηγή τάσης**, προκειμένου στο φορτίο να «εμφανίζεται» το μεγαλύτερο ποσοστό της τάσης της πηγής, θα πρέπει $\mathbf{R_S \ll R_\ell}$.

  Αν η πηγή τάσης είναι **ιδανική** ($\mathbf{R_S = 0}$), στο φορτίο «εμφανίζεται» **ολόκληρη** η τάση της πηγής ($\mathbf{v_\ell = v_S}$).
- Για σύνδεση αντίστασης φορτίου με **πηγή ρεύματος**, προκειμένου στο φορτίο να «διοχετεύεται» το μεγαλύτερο ποσοστό του ρεύματος της πηγής, θα πρέπει $\mathbf{R_S \gg R_\ell}$.

  Αν η πηγή ρεύματος είναι **ιδανική** ($\mathbf{R_S} \to \infty$), στο φορτίο «διοχετεύεται» **ολόκληρο** το ρεύμα της πηγής ($\mathbf{i_\ell = i_S}$).

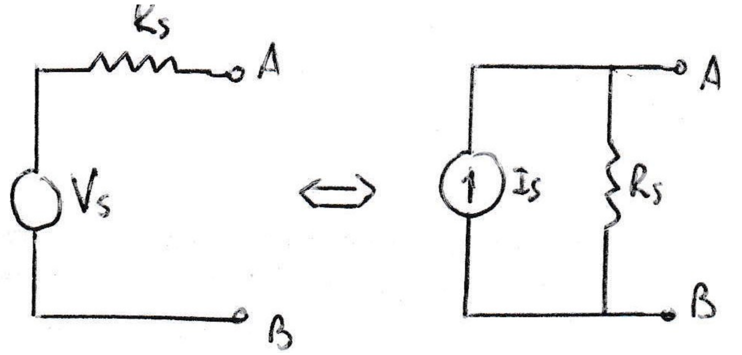
Τα παραπάνω, προκύπτουν και αν οι σχέσεις διαίρεσης τάσης και ρεύματος γραφούν στη μορφή

$$\frac{v_\ell(t)}{v_S(t)} = \frac{1}{\frac{R_S}{R_\ell} + 1}$$

$$\frac{i_\ell(t)}{i_S(t)} = \frac{1}{1 + \frac{R_\ell}{R_S}}$$

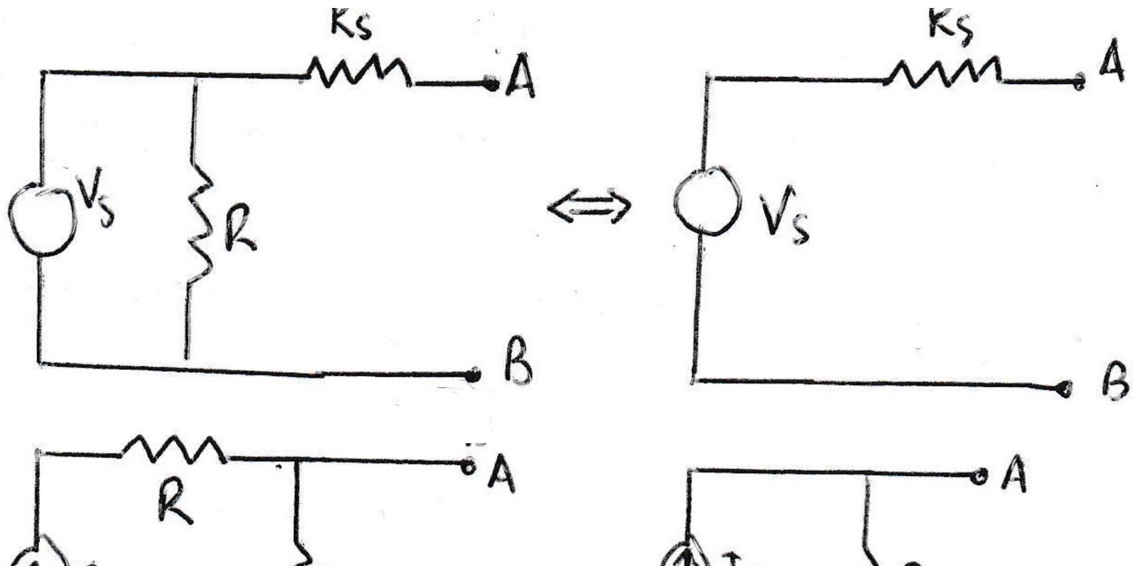
οι δε ποσότητες $\frac{v_\ell(t)}{v_S(t)}$ και $\frac{i_\ell(t)}{i_S(t)}$ μελετηθούν συναρτήσει των τιμών (αντίστοιχα) $\frac{R_S}{R_\ell}$ και $\frac{R_\ell}{R_S}$ (βλ. παραδείγματα 7 και 8).

2.1.3. Ισοδύναμα κυκλώματα



$$I_s = \frac{V_S}{R_S}$$

Ισοδυναμία πηγής τάσης με πηγή ρεύματος



Άλλα ισοδύναμα κυκλώματα (στα παραπάνω κυκλώματα, ο αντιστάτης R μπορεί να παραλειφθεί)

2.1.4. Παραδείγματα

Παράδειγμα 1

Πηγή τάσης v_S = 100V με εσωτερική αντίσταση R_S = 50Ω συνδέεται με αντίσταση φορτίου R_l = 150Ω. Να υπολογιστεί η τάση v_l του φορτίου.

Ο υπολογισμός να επαναληφθεί αν R_l = 450Ω.

Λύση

$$v_l(t) = v_S(t)\ \frac{R_\ell}{R_s + R_\ell}$$

Για R_l = 150Ω, είναι $v_l(t)$ = 75V.

Για R_l = 450Ω, είναι $v_l(t)$ = 90V.

Σχόλιο: Όσο αυξάνεται η τιμή της αντίστασης φορτίου R_l, ο λόγος $\frac{R_\ell}{R_s}$ αυξάνεται οπότε η πηγή τάσης πλησιάζει περισσότερο προς την ιδανική κατάσταση (όπου $v_l = v_S$)

Παράδειγμα 2

Πηγή ρεύματος i_S = 12A με εσωτερική αντίσταση R_S = 450Ω συνδέεται με αντίσταση φορτίου R_l =150Ω. Να υπολογιστεί το ρεύμα i_l του φορτίου.

Ο υπολογισμός να επαναληφθεί αν R_l = 50Ω.

Λύση

$$i_l(t) = i_S(t)\ \frac{R_s}{R_s + R_\ell}$$

Για R_l = 150Ω, είναι $i_l(t)$ = 9A.

Για R_l = 450Ω, είναι $v_l(t)$ = 10,8A.

Σχόλιο: Όσο μειώνεται η τιμή της αντίστασης φορτίου R_l, ο λόγος $\frac{R_s}{R_\ell}$ αυξάνεται οπότε η πηγή ρεύματος πλησιάζει περισσότερο προς την ιδανική κατάσταση (όπου $i_l = i_S$)

Παράδειγμα 3

Για πηγή τάσης v_S, να υπολογιστεί το κλάσμα $\frac{R_s}{R_\ell}$ προκειμένου το κλάσμα $\frac{v_\ell}{v_s}$ να έχει τιμές 0.5, 0.9, 0.99.

Λύση

Η σχέση $v_l(t) = v_S(t)\ \frac{R_\ell}{R_s + R_\ell}$ γράφεται στη μορφή $\frac{v_\ell}{v_s} = \frac{1}{\frac{R_s}{R_\ell} + 1}$

Θέτοντας $\frac{v_\ell}{v_s}$ = 0,5 ή 0,9 ή 0,99 και λύνοντας ως προς $\frac{R_s}{R_\ell}$, προκύπτει (αντίστοιχα)

$\frac{R_s}{R_\ell}$ = 1 ή 0,11 ή 0,01

Παράδειγμα 4

Για πηγή ρεύματος i_S, να υπολογιστεί το κλάσμα $\frac{R_\ell}{R_s}$ προκειμένου το κλάσμα $\frac{i_\ell}{i_s}$ να έχει τιμές 0.5, 0.9, 0.99.

Λύση

Η σχέση $i_l(t) = i_S(t)\ \frac{R_s}{R_s + R_\ell}$ γράφεται στη μορφή $\frac{i_\ell}{i_s} = \frac{1}{1+\frac{R_\ell}{R_s}}$

Θέτοντας $\frac{i_\ell}{i_s} = 0,5$ ή 0,9 ή 0,99 και λύνοντας ως προς $\frac{R_\ell}{R_s}$, προκύπτει (αντίστοιχα)

$\frac{R_\ell}{R_s} = 1$ ή 0,11 ή 0,01.

Παράδειγμα 5

Για πηγή τάσης v_S = 100 V και εσωτερική αντίσταση R_S = 10Ω, να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της τάσης φορτίου v_l (κατακόρυφος άξονας) συναρτήσει της αντίστασης φορτίου R_l (οριζόντιος άξονας). Να ληφθούν τιμές R_l = 0 έως 90Ω με βήμα 10Ω.

Λύση

$v_l = 100\ \frac{R_\ell}{10 + R_\ell}$

R_l	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
v_l	0	50	66,7	75	80	83,3	85,7	87,5	88,9	90

Σχόλιο: Όσο αυξάνεται η τιμή της αντίστασης φορτίου R_l, ο λόγος $\frac{R_\ell}{R_s}$ αυξάνεται και η πηγή τάσης πλησιάζει περισσότερο προς την ιδανική κατάσταση (όπου $v_l = v_S$).

Παράδειγμα 6

Για πηγή ρεύματος i_S = 100 V και εσωτερική αντίσταση R_S = 900Ω, να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση του ρεύματος φορτίου i_l (κατακόρυφος άξονας) συναρτήσει της αντίστασης φορτίου R_l (οριζόντιος άξονας). Να ληφθούν τιμές R_l = 0 έως 900Ω με βήμα 100Ω.

Λύση

$$i_l = 100\ \frac{900}{900 + R_\ell}$$

R_l	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900
i_l	100	90	81,8	75	69,2	64,3	60	56,3	52,9	50

Σχόλιο: Μολονότι η πηγή ρεύματος δεν είναι ιδανική ($R_S < \infty$), για αντίσταση φορτίου R_l = 0 (βραχυκύκλωση φορτίου), $\frac{R_S}{R_\ell} \to \infty$ οπότε η πηγή συμπεριφέρεται σαν να ήταν ιδανική. Στη συνέχεια, όσο αυξάνεται η τιμή της αντίστασης φορτίου R_l, ο λόγος $\frac{R_s}{R_\ell}$ μειώνεται οπότε η πηγή ρεύματος απομακρύνεται από την ιδανική κατάσταση (όπου $i_l = i_S$).

Παράδειγμα 7

Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση του κλάσματος $\frac{v_\ell}{v_s}$ (κατακόρυφος άξονας) συναρτήσει του κλάσματος $\frac{R_s}{R_\ell}$ (οριζόντιος άξονας). Να ληφθούν τιμές $\frac{R_s}{R_\ell} = 0$ (ιδανική πηγή τάσης) καθώς και $\frac{R_s}{R_\ell} = 0{,}2$ έως και 2 με βήμα 0,2.

Λύση

$$\frac{v_\ell}{v_s} = \frac{1}{\frac{R_s}{R_\ell} + 1}$$

άρα η γραφική παράσταση είναι της μορφής $y = \frac{1}{x+1}$ όπου $y = \frac{v_\ell}{v_s}$ και $x = \frac{R_s}{R_\ell}$

$x = \frac{R_s}{R_\ell}$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	…
$y = \frac{v_\ell}{v_s}$	1	0,83	0,71	0,63	0,56	0,5	0,45	0,42	0,38	…

Παράδειγμα 8

Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση του κλάσματος $\frac{i_\ell}{i_s}$ (κατακόρυφος άξονας) συναρτήσει του κλάσματος $\frac{R_\ell}{R_s}$ (οριζόντιος άξονας). Να ληφθούν τιμές $\frac{R_\ell}{R_s} = 0$ (ιδανική πηγή ρεύματος) καθώς και $\frac{R_\ell}{R_s} = 0{,}2$ έως και 2 με βήμα 0,2.

Λύση

$$\frac{i_\ell}{i_s} = \frac{1}{1 + \frac{R_\ell}{R_s}}$$

άρα η γραφική παράσταση είναι της μορφής $y = \frac{1}{1+x}$ όπου $y = \frac{i_\ell}{i_s}$ και $x = \frac{R_\ell}{R_s}$

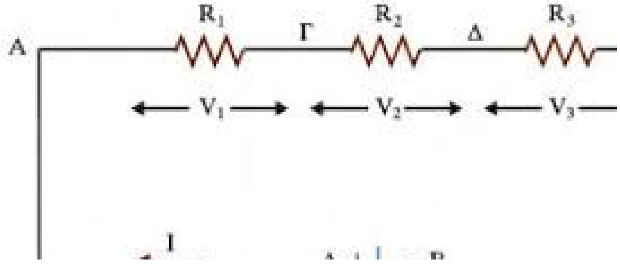
$x = \frac{R_s}{R_\ell}$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	…
$y = \frac{v_\ell}{v_s}$	1	0,83	0,71	0,63	0,56	0,5	0,45	0,42	0,38	…

2.2. Συνδεσμολογίες απλών κυκλωματικών στοιχείων

2.2.1. Αντιστάτες

Αντιστάτες σε σειρά

$R_{ολ} = R_1 + R_2 + \ldots + R_n$



Απόδειξη

Οι αντιστάτες διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα i.

$v = v_1 + v_2 + \ldots + v_n \;\Rightarrow\; v = iR_1 + iR_2 + \ldots + iR_n \;\Rightarrow$

$v = i(R_1 + R_2 + \ldots + R_n)$

Η ολική αντίσταση $R_{ολ}$ (που υποκαθιστά τις $R_1, R_2, \ldots, R_n$) θα πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση

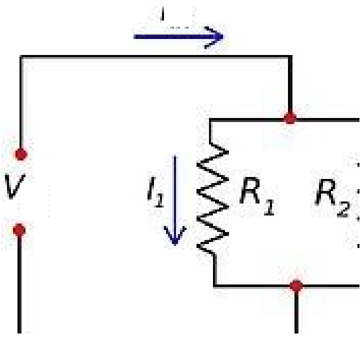
$v = iR_{ολ}$

άρα

$R_{ολ} = R_1 + R_2 + \ldots + R_n$

Αντιστάτες παράλληλα

$$\frac{1}{R_{ολ}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}$$



Απόδειξη

Οι αντιστάτες είναι υπό την ίδια τάση v.

$i = i_1 + i_2 + \ldots + i_n \;\Rightarrow\; i = \frac{v}{R_1} + \frac{v}{R_2} + \ldots + \frac{v}{R_n} \;\Rightarrow$

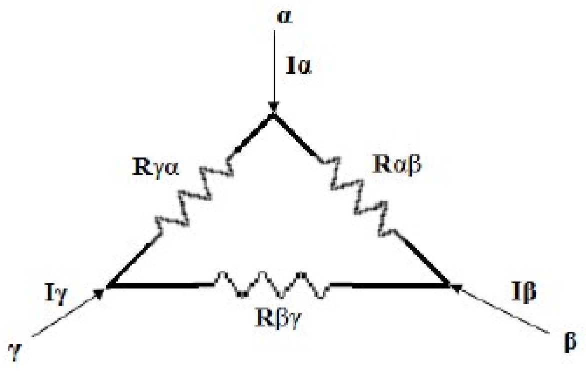
$$i = v\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}\right)$$

Η ολική αντίσταση $R_{ολ}$ (που υποκαθιστά τις $R_1, R_2, \ldots, R_n$) θα πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση $i = \frac{v}{R_{ολ}}$ άρα

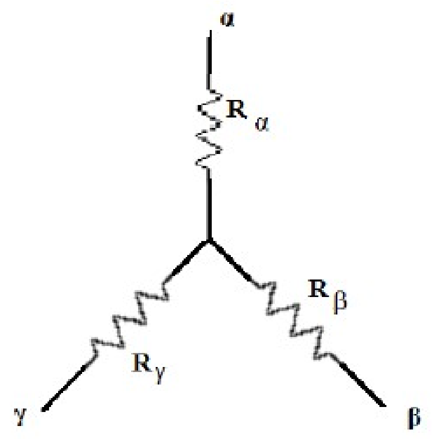
$$\frac{1}{R_{ολ}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}$$

Αντιστάτες σε συνδεσμολογία αστέρα (**Υ**) και τριγώνου (**Δ**)

Η μετατροπή συνδεσμολογίας αντιστατών τοπολογίας αστέρα (συμβολικά, **Υ**) σε συνδεσμολογία τοπολογίας τριγώνου (συμβολικά, **Δ**) γίνεται σύμφωνα με τους παρακάτω τύπους (θεώρημα Kenelly):



Σύνδεση αντιστάσεων σε τρίγωνο



Σύνδεση αντιστάσεων σε αστέρα

$$R_{\alpha\beta} = \frac{R_\alpha R_\beta + R_\beta R_\gamma + R_\gamma R_\alpha}{R_\gamma}$$

$$R_{\beta\gamma} = \frac{R_\alpha R_\beta + R_\beta R_\gamma + R_\gamma R_\alpha}{R_\alpha}$$

$$R_{\gamma\alpha} = \frac{R_\alpha R_\beta + R_\beta R_\gamma + R_\gamma R_\alpha}{R_\beta}$$

$$R_\alpha = \frac{R_{\alpha\beta} R_{\alpha\gamma}}{R_{\alpha\beta} + R_{\beta\gamma} + R_{\gamma\alpha}}$$

$$R_\beta = \frac{R_{\beta\gamma} R_{\beta\alpha}}{R_{\alpha\beta} + R_{\beta\gamma} + R_{\gamma\alpha}}$$

$$R_\gamma = \frac{R_{\gamma\alpha} R_{\gamma\beta}}{R_{\alpha\beta} + R_{\beta\gamma} + R_{\gamma\alpha}}$$

2.2.2. Πηνία

Πηνία σε σειρά

$L_{ολ} = L_1 + L_2 + \ldots + L_n$

Απόδειξη

Τα πηνία διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα i.

$$v = v_1 + v_2 + \ldots + v_n \;\Rightarrow\; v = L_1\frac{di}{dt} + L_2\frac{di}{dt} + \ldots + L_n\frac{di}{dt} \;\Rightarrow$$

$$v = (L_1 + L_2 + \ldots + L_n)\frac{di}{dt}$$

Η ολική αυτεπαγωγή $L_{ολ}$ (που υποκαθιστά τις $L_1, L_2, \ldots, L_n$) θα πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση

$$v = L_{ολ}\frac{di}{dt}.$$

άρα

$L_{ολ} = L_1 + L_2 + \ldots + L_n$

Πηνία παράλληλα

$$\frac{1}{L_{ολ}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \ldots + \frac{1}{L_n}$$

Απόδειξη

Τα πηνία είναι υπό την ίδια τάση v.

$$i = i_1 + i_2 + \ldots + i_n \;\Rightarrow\; i = \frac{1}{L_1}\int v(t)dt + \frac{1}{L_2}\int v(t)dt + \ldots + \frac{1}{L_n}\int v(t)dt \;\Rightarrow$$

$$i = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \ldots + \frac{1}{L_n}\right)\int v(t)dt$$

Η ολική αυτεπαγωγή $L_{ολ}$ (που υποκαθιστά τις $L_1, L_2, \ldots, L_n$) θα πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση

$$i = \frac{1}{L_{ολ}}\int v(t)dt$$

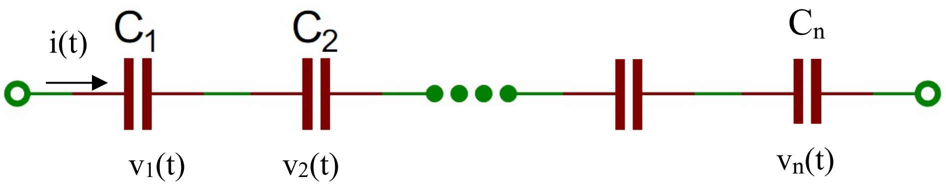
άρα

$$\frac{1}{L_{ολ}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \ldots + \frac{1}{L_n}$$

2.2.3. Πυκνωτές

Πυκνωτές σε σειρά

$$\frac{1}{C_{ολ}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}$$



Απόδειξη

Οι πυκνωτές διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα i.

$v = v_1 + v_2 + \ldots + v_n \Rightarrow$

$$v = \frac{1}{C_1}\int i(t)dt + \frac{1}{C_2}\int i(t)dt + \ldots + \frac{1}{C_n}\int i(t)dt \Rightarrow$$

$$v = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}\right)\int i(t)dt$$

Η ολική χωρητικότητα $C_{ολ}$ (που υποκαθιστά τις C_1, C_2, …, C_n) θα πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση

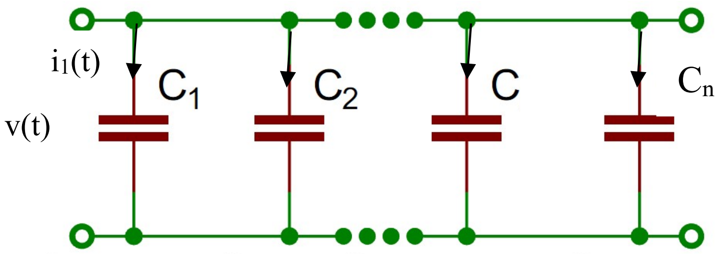
$$v = \frac{1}{C_{ολ}}\int i(t)dt$$

άρα

$$\frac{1}{C_{ολ}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}$$

Πυκνωτές παράλληλα

$C_{ολ} = C_1 + C_2 + \ldots + C_n$



Απόδειξη

Οι πυκνωτές είναι υπό την ίδια τάση v.

$$i = i_1 + i_2 + \ldots + i_n \;\Rightarrow\; i = C_1\frac{dv}{dt} + C_2\frac{dv}{dt} + \ldots + C_n\frac{dv}{dt} \;\Rightarrow\; i = (C_1 + C_2 + \ldots + C_n)\frac{dv}{dt}$$

Η ολική χωρητικότητα $C_{ολ}$ (που υποκαθιστά τις $C_1, C_2, \ldots, C_n$) θα πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση

$$i = C_{ολ}\frac{dv}{dt}.$$

άρα

$$C_{ολ} = C_1 + C_2 + \ldots + C_n$$

2.2.4. Ασκήσεις

Άσκηση 1

Να υπολογιστεί η ισοδύναμη αντίσταση $R_{ολ}$ για παράλληλη σύνδεση **n** αντιστάσεων που η καθεμιά ισούται με R.

Λύση

$$\frac{1}{R_{ολ}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \ldots + \frac{1}{R} = \frac{n}{R} \;\Rightarrow\; R_{ολ} = \frac{R}{n}$$

Άσκηση 2

Να υπολογιστεί η αντίσταση R’ η οποία θα πρέπει να συνδεθεί παράλληλα με αντίσταση R ώστε η ισοδύναμη αντίσταση $R_{ολ}$ να προκύψει ίση με $\frac{R}{3}$ (η R’ να δοθεί ως συνάρτηση του R).

Λύση

Θα πρέπει

$$\frac{RR'}{R + R'} = \frac{R}{3}$$

Επιλύοντας ως προς R’, προκύπτει $R' = \frac{R}{2}$

Άσκηση 3

Να αποδειχθεί ότι για την ισοδύναμη αντίσταση $R_{ολ}$ σε παράλληλη σύνδεση δύο αντιστάσεων R_1 και R_2 ισχύει ότι $R_{ολ} < R_1$ και $R_{ολ} < R_2$.

Λύση

$$R_{ολ} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} < 1 \;\Rightarrow\; \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} < R_1$$

$$\frac{R_1}{R_1 + R_2} < 1 \;\Rightarrow\; \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} < R_2$$

Παραπομπές κεφαλαίου

Γ.Ε. Χατζαράκης. Ηλεκτρικά Κυκλώματα, Εκδ. Τζιόλα & Υιοί, 2015.
Ενότητες: 2.1, 2.2, 2.3, 2.5, 2.8, 2.9, 2.10, 2.11, 2.12, 2.13.1.
Εφαρμογές (λυμένες ασκήσεις, ενότητα 2.14): 1η, 6η, 9η.