ΑΝΩΤΑΤΗ ΣΧΟΛΗ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ (Α.Σ.ΠΑΙ.Τ.Ε.)

Τμήμα Εκπαιδευτικών Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Εκπαιδευτικών Ηλεκτρονικών Μηχανικών

Γερ. Κ. Παγιατάκης

Καθηγητής Α.Σ.ΠΑΙ.ΤΕ.

ΒΑΣΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
για ΗΛΓ / ΗΛΚ

2023

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Γραμμικά συστήματα

1.1. Γραμμικά συστήματα 2x2

Υπολογισμός ορίζουσας 2x2 (γενική μορφή)

$$\Delta = \begin{vmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} \end{vmatrix} = \kappa_{11}\kappa_{22} - \kappa_{12}\kappa_{21}$$

Επίλυση γραμμικού συστήματος 2x2 με τη μέθοδο Cramer (χρήση οριζουσών)[1]

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b1 \\ b2 \end{vmatrix}$$

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad , \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad , \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

Η εφαρμογή της μεθόδου προϋποθέτει ότι $\mathbf{\Delta \neq 0}$. Στην περίπτωση αυτή, υπάρχει μία μοναδική λύση (x_1, x_2).

Αν $\mathbf{\Delta = 0}$, η επίλυση του συστήματος γίνεται ως εξής:

- ✓ Υπολογίζονται οι ορίζουσες Δ_1 και Δ_2 Αν μία από αυτές είναι διάφορη του μηδενός, το σύστημα είναι **αδύνατο** (δεν έχει λύση).
- ✓ Αν $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$, το σύστημα είναι **αόριστο** οπότε ένας άγνωστος υπολογίζεται συναρτήσει του άλλου.

[1] Ένα σύστημα εξισώσεων 2x2 μπορεί, εναλλακτικά, να επιλυθεί με τη μέθοδο της αντικατάστασης. Αν και το ποια μέθοδος είναι προτιμητέα εξαρτάται από τη μορφή του συστήματος, η χρήση της μεθόδου της αντικατάστασης συνήθως δεν παρουσιάζει δυσκολίες.

Παράδειγμα

Να επιλυθεί το σύστημα

$x_1 - 2x_2 = 4$

$x_1 + x_2 = 1$

Λύση (με τη μέθοδο των οριζουσών)

$\Delta = -3$, $\Delta_1 = -6$, $\Delta_2 = -3$

$x_1 = 2$, $x_2 = -1$

Λύση (με τη μέθοδο της αντικατάστασης)

$x_1 - 2x_2 = 4 \;\Rightarrow\; x_1 = 2x_2 + 4$

$x_1 + x_2 = 1 \;\Rightarrow\; 2x_2 + 4 + x_2 = 1 \;\Rightarrow\; x_2 = -1 \;\Rightarrow\; x_1 = 2$

1.2. Γραμμικά συστήματα 3x3

Υπολογισμός ορίζουσας 3x3 (γενική μορφή)

$$\Delta = \begin{vmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} & \kappa_{13} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} & \kappa_{23} \\ \kappa_{31} & \kappa_{32} & \kappa_{33} \end{vmatrix} = \kappa_{11}\begin{vmatrix} \kappa_{22} & \kappa_{23} \\ \kappa_{32} & \kappa_{33} \end{vmatrix} - \kappa_{12}\begin{vmatrix} \kappa_{21} & \kappa_{23} \\ \kappa_{31} & \kappa_{33} \end{vmatrix} + \kappa_{13}\begin{vmatrix} \kappa_{21} & \kappa_{22} \\ \kappa_{31} & \kappa_{32} \end{vmatrix}$$

Επίλυση γραμμικού συστήματος 3x3 με τη μέθοδο Cramer (χρήση οριζουσών)[2]

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{vmatrix}$$

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$
$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad , \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad , \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Η εφαρμογή της μεθόδου προϋποθέτει ότι $\mathbf{\Delta \neq 0}$. Στην περίπτωση αυτή, υπάρχει μία μοναδική λύση (x_1, x_2, x_3).

Αν $\mathbf{\Delta = 0}$, η επίλυση του συστήματος γίνεται ως εξής:

- ✓ Υπολογίζονται οι ορίζουσες Δ_1, Δ_2 και Δ_3. Αν μία από αυτές είναι διάφορη του μηδενός, το σύστημα είναι **αδύνατο** (δεν έχει λύση).
- ✓ Αν $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$, το σύστημα είναι **αόριστο** οπότε ένας (ή δύο) από τους αγνώστους υπολογίζεται (υπολογίζονται) συναρτήσει των άλλων δύο (ή του τρίτου).

[2] Ένα σύστημα εξισώσεων μπορεί, εναλλακτικά, να επιλυθεί και με τη μέθοδο της αντικατάστασης. Ειδικά για τα συστήματα 3x3, το ποια μέθοδος είναι προτιμητέα (από άποψη αλγεβρικών πράξεων) εξαρτάται από τη μορφή του συστήματος.

Παραδείγματα

Να επιλυθεί το σύστημα

$x_1 + x_2 + x_3 = 4$

$x_1 - x_2 - x_3 = 2$

$x_1 - x_2 + x_3 = 6$

Απάντηση

$\Delta = -4$, $\Delta_1 = -12$, $\Delta_2 = 4$, $\Delta_3 = -8$

$x_1 = 3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$

Να επιλυθεί το σύστημα

$x_1 + x_2 + x_3 = 4$

$x_1 + x_2 + x_3 = 8$

$x_1 - x_2 + x_3 = 6$

Απάντηση

$\Delta = 0$, $\Delta_1 = -8$ $(\neq 0)$

Το σύστημα είναι αδύνατο (φαίνεται και από τις δύο πρώτες εξισώσεις).

Να επιλυθεί το σύστημα

$x_1 + x_2 + x_3 = 4$

$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 8$

$3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 12$

Απάντηση

$\Delta = 0$, $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$.

Το σύστημα είναι αόριστο (προκύπτει και από το γεγονός ότι οι 2η και η 3η εξίσωση είναι, απλώς, πολλαπλάσια της 1ης).

1.2. Γραμμικά συστήματα 2x2

Υπολογισμός ορίζουσας 2x2 (γενική μορφή)

$$\Delta = \begin{vmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} \end{vmatrix} = \kappa_{11}\kappa_{22} - \kappa_{12}\kappa_{21}$$

Επίλυση γραμμικού συστήματος 2x2 με τη μέθοδο Cramer (χρήση οριζουσών)[3]

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b1 \\ b2 \end{vmatrix}$$

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad , \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad , \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

Η εφαρμογή της μεθόδου προϋποθέτει ότι **$\Delta \neq 0$**. Στην περίπτωση αυτή, υπάρχει μία μοναδική λύση (x_1, x_2).

Αν **$\Delta = 0$**, η επίλυση του συστήματος γίνεται ως εξής:

- ✓ Υπολογίζονται οι ορίζουσες Δ_1 και Δ_2 Αν μία από αυτές είναι διάφορη του μηδενός, το σύστημα είναι **αδύνατο** (δεν έχει λύση).
- ✓ Αν $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$, το σύστημα είναι **αόριστο** οπότε ένας άγνωστος υπολογίζεται συναρτήσει του άλλου.

[3] Ένα σύστημα εξισώσεων 2x2 μπορεί, εναλλακτικά, να επιλυθεί με τη μέθοδο της αντικατάστασης. Αν και το ποια μέθοδος είναι προτιμητέα εξαρτάται από τη μορφή του συστήματος, η χρήση της μεθόδου της αντικατάστασης συνήθως δεν παρουσιάζει δυσκολίες.

Παράδειγμα

Να επιλυθεί το σύστημα

$x_1 - 2x_2 = 4$

$x_1 + x_2 = 1$

Λύση (με τη μέθοδο των οριζουσών)

$\Delta = -3$, $\Delta_1 = -6$, $\Delta_2 = -3$

$x_1 = 2$, $x_2 = -1$

Λύση (με τη μέθοδο της αντικατάστασης)

$x_1 - 2x_2 = 4 \;\Rightarrow\; x_1 = 2x_2 + 4$

$x_1 + x_2 = 1 \;\Rightarrow\; 2x_2 + 4 + x_2 = 1 \;\Rightarrow\; x_2 = -1 \;\Rightarrow\; x_1 = 2$

2. Τριγωνομετρία (βασικά στοιχεία) [4]

Ορισμοί

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί **cosθ**, **sinθ** ορίζονται με τη βοήθεια του **τριγωνομετρικού κύκλου** (κύκλου με ακτίνα **r = 1**) όπως φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί[5]. Σύμφωνα με το σχήμα αυτό:

- Το **cosθ** (συνημίτονο θ) είναι η **προβολή**, στον **οριζόντιο** άξονα Ox, του **διανύσματος** που αντιστοιχεί στη γωνία θ.
- Το **sinθ** (ημίτονο θ) είναι η **προβολή**, στον **κατακόρυφο** άξονα Oy, του **διανύσματος** που αντιστοιχεί στη γωνία θ.

Η **γραφική παράσταση** του **μήκους** των παραπάνω **προβολών** συναρτήσει της γωνίας θ, δίνει τις γνωστές «κυματοειδείς» παραστάσεις των **cosθ**, **sinθ.**

Μεταξύ των συγκεκριμένων τριγωνομετρικών αριθμών, ισχύει η σχέση (βασική τριγωνομετρική ταυτότητα)

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \;\Leftrightarrow\; \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta \;\Leftrightarrow\; \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

Με χρήση των cosθ και sinθ, ορίζονται και η **tanθ** (**εφαπτομένη** θ) και **cotθ** (**συνεφαπτομένη** θ) ως εξής[6]:

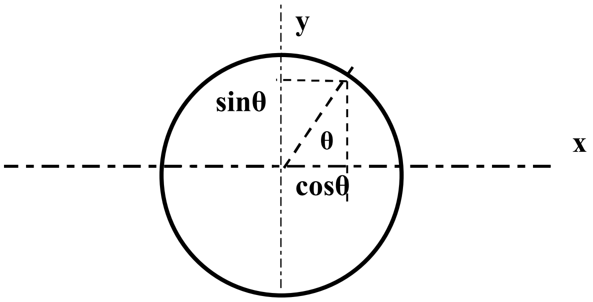
$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

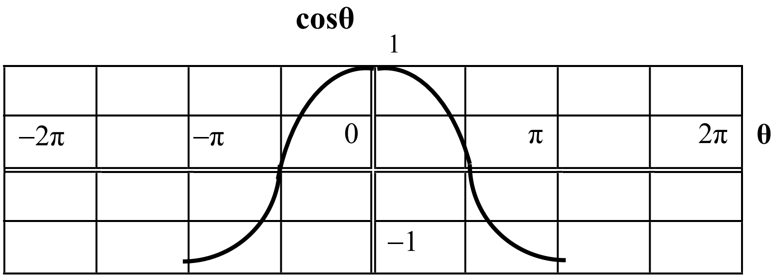
$$\cot\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\tan\theta}$$

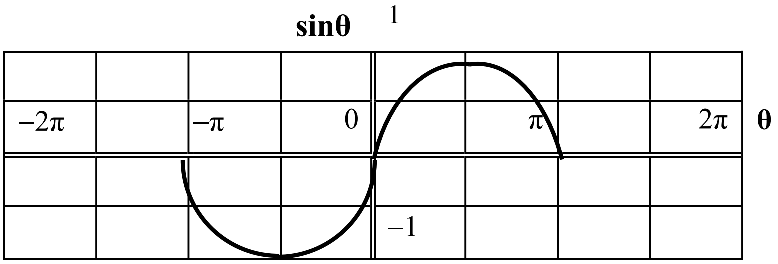
[4] Ο όρος «τριγωνομετρία» σχετίζεται με το γεγονός ότι οντότητες (τριγωνομετρικοί αριθμοί) όπως το sinθ, cosθ, tanθ, cotθ ορίστηκαν αρχικά στο ορθογώνιο τρίγωνο.

[5] Ο λόγος, ωστόσο, που οι παραπάνω οντότητες είναι προτιμότερο να ορίζονται επί του τριγωνομετρικού κύκλου (αντί για το ορθογώνιο τρίγωνο) είναι ότι, στο ορθογώνιο τρίγωνο, ο ορισμός τριγωνομετρικών αριθμών για $\theta \geq 90^o$ είναι μάλλον δυσχερής.

[6] Επισημαίνεται ότι ο ορισμός των tanθ και cotθ (συμβατός με τους αλγεβρικούς ορισμούς) μπορεί να γίνει και επί του τριγωνομετρικού, ωστόσο παραλείπεται χάριν συντομίας.







Τριγωνομετρικοί αριθμοί βασικών γωνιών

Γωνία θ(º)	Γωνία θ(rad)	sinθ	cosθ	tanθ	cotθ
0^o	0	0	1	0	∞
30^o	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45^o	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60^o	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$
90^o	$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞	0
180^o	π	0	1	0	∞

Είναι προφανές ότι οι τιμές του πίνακα ικανοποιούν τις βασικές σχέσεις

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\cot\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{1}{\tan\theta}$

Αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο

Μέσω της αναγωγής στο 1ο τεταρτημόριο, τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών που ανήκουν στο 2ο, 3ο ή 4ο τεταρτημόριο εκφράζονται ως τριγωνομετρικοί αριθμοί της βασικής γωνίας θ.

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$
$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$$
$$\sin(\pi-\theta) = \sin\theta$$

$$\cos(\pi+\theta) = -\cos\theta$$
$$\sin(\pi+\theta) = -\sin\theta$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) = \sin\theta$$
$$\sin(\frac{\pi}{2}-\theta) = \cos\theta$$
$$\cos(\frac{\pi}{2}+\theta) = -\sin\theta$$
$$\sin(\frac{\pi}{2}+\theta) = \cos\theta$$

Όλες οι παραπάνω ταυτότητες προκύπτουν άμεσα με επισκόπηση του τριγωνομετρικού κύκλου.

Από την επισκόπηση του τριγωνομετρικού κύκλου, προκύπτει και ότι οι γωνίες της μορφής **θ±2kπ** (θ±2π, θ±4π κλπ.) έχουν τους **ίδιους** τριγωνομετρικούς αριθμούς με τη γωνία **θ**.

Αθροίσματα και διαφορές γωνιών – Διπλάσια γωνία

Μπορεί να αποδειχθούν οι παρακάτω ταυτότητες (που εμπλέκουν αθροίσματα και διαφορές γωνιών):

$$\cos(\theta+\varphi) = \cos\theta.\cos\varphi - \sin\theta.\sin\varphi$$
$$\cos(\theta-\varphi) = \cos\theta.\cos\varphi + \sin\theta.\sin\varphi$$

$$\sin(\theta+\varphi) = \sin\theta.\cos\varphi + \cos\theta.\sin\varphi$$
$$\sin(\theta-\varphi) = \sin\theta.\cos\varphi - \cos\theta.\sin\varphi$$

Από τις παραπάνω σχέσεις, προσθέτοντας και αφαιρώντας, κατά μέλη, προκύπτουν οι σχέσεις:

$$2.\cos\theta.\cos\varphi = \cos(\theta-\varphi) + \cos(\theta+\varphi)$$
$$2.\sin\theta.\sin\varphi = \cos(\theta-\varphi) - \cos(\theta+\varphi)$$
$$2.\sin\theta.\cos\varphi = \sin(\theta+\varphi) - \sin(\theta-\varphi)$$

Θέτοντας $\varphi = \theta$ στις σχέσεις για το $\cos(\theta+\varphi)$ και $\sin(\theta+\varphi)$ προκύπτει ότι

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2.\cos^2\theta - 1 = 1 - 2.\sin^2\theta$$
$$\Rightarrow\quad 2.\cos^2\theta = 1 + \cos(2\theta)$$
$$\Rightarrow\quad 2.\sin^2\theta = 1 - \cos(2\theta)$$

(όπου έγινε χρήση και της ταυτότητας $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$)
και

$$\sin(2\theta) = 2.\sin\theta.\cos\theta$$

Τέλος, μπορούν να αποδειχθούν και οι παρακάτω σχέσεις:

$$\cos\theta + \cos\varphi = 2.\cos\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)$$
$$\cos\theta - \cos\varphi = 2.\sin\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{\varphi-\theta}{2}\right)$$
$$\sin\theta + \sin\varphi = 2.\sin\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)$$
$$\sin\theta - \sin\varphi = 2.\sin\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)$$

Άσκηση

Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών 15°, 75° και 22,5°.

Λύση

$\cos15^o = \cos(45^o-30^o) = \cos45^o.\cos30^o + \sin45^o.\sin30^o = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\sin15^o = \sin(45^o-30^o) = \sin45^o.\cos30^o - \cos45^o.\sin30^o = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\cos75^o = \cos(45^o+30^o) = \cos45^o.\cos30^o - \sin45^o.\sin30^o = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\sin75^o = \sin(45^o+30^o) = \sin45^o.\cos30^o + \cos45^o.\sin30^o = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$2\cos^2(22{,}5^o) = 2\cos^2\left(\frac{45^o}{2}\right) = \cos45^o + 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = \frac{\sqrt{2}+2}{2} \Rightarrow \cos^2(22{,}5^o) = \frac{\sqrt{2}+2}{4} \Rightarrow$

$\cos(22{,}5^o) = +\sqrt{\frac{\sqrt{2}+2}{4}}$

(επιλέγεται «εξωτερικό» πρόσημο “+” διότι η γωνία των 22,5° είναι στο 1° τεταρτημόριο).

$2\sin^2(22{,}5^o) = 2\sin^2\left(\frac{45^o}{2}\right) = \cos45^o - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{2}-2}{2} \Rightarrow \sin^2(22{,}5^o) = \frac{\sqrt{2}-2}{4} \Rightarrow$

$\sin(22{,}5^o) = +\sqrt{\frac{\sqrt{2}-2}{4}}$

(επιλέγεται «εξωτερικό» πρόσημο “+” διότι η γωνία των 22,5° είναι στο 1° τεταρτημόριο).

Παρατηρήσεις

$\cos^2 15^o + \sin^2 15^o = 1$

$\cos^2 75^o + \sin^2 75^o = 1$

$\cos^2(22{,}5^o) + \sin^2(22{,}5^o) = 1$

$\cos15^o = \sin75^o$

$\sin15^o = \cos15^o$

3. Λογάριθμοι (βασικά στοιχεία)

Γενικά

Αν **β > 0** (με **β ≠ 1**) και **α > 0**, ο **λογάριθμος** του **α** με **βάση** το **β** ορίζεται με βάση την ισοδυναμία που ακολουθεί

$x = \log_\beta \alpha \;\Leftrightarrow\; \beta^x = \alpha$

Δηλαδή, ο **λογάριθμος x** είναι ο **εκθέτης** που με **βάση** το **β** δίνει τον αριθμό **α**

Στις περισσότερες εφαρμογές, οι βάσεις που χρησιμοποιούνται είναι η **β = 10** (δεκαδικοί λογάριθμοι) είτε η **β = e** (νεπέριοι λογάριθμοι). Στις περιπτώσεις αυτές, ο συμβολισμός που ακολουθείται είναι ο παρακάτω:

$\mathbf{log\alpha} \equiv \log_{10}\alpha$

$\mathbf{ln\alpha} \equiv \log_e\alpha$

Ιδιότητες λογαρίθμων

$\log_\beta 1 = 0$

$\alpha < 1 \;\Leftrightarrow\; \log_\beta\alpha < 0$ και $\alpha > 1 \;\Leftrightarrow\; \log_\beta\alpha > 0$

(π.χ. $\log 1 = 0$, $\log(\frac{1}{2}) = -0{,}3$, $\log 4 = +0{,}6$)

$\log_\beta\beta = 1 \;\Rightarrow\; \log 10 = 1$ και $\ln e = 1$

$\log_\beta(\frac{1}{\alpha}) = -\log_\beta\alpha$

(π.χ. $\log 2 = 0{,}3$, $\log(\frac{1}{2}) = -0{,}3$)

$\log_\beta(\alpha_1 \bullet \alpha_2) = \log_\beta\alpha_1 + \log_\beta\alpha_2$

$\log_\beta(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}) = \log_\beta\alpha_1 - \log_\beta\alpha_2$

$\log_\beta(\alpha^p) = p \bullet \log_\beta\alpha$

(π.χ. $\log 8 = \log 2^3 = 3 \bullet \log 2 = 3 \bullet 0{,}3 = 0{,}9$)

$\log_\beta(\beta^p) = p \bullet \log_\beta\beta = p$

(π.χ. $\log 1000 = \log(10^3) = 3 \bullet \log 10 = 3$)

$\log_\beta\alpha = \dfrac{\log_\gamma \alpha}{\log_\gamma \beta}$ (αλλαγή βάσης λογαρίθμου)

(π.χ. $\log e \equiv \log_{10}e = \dfrac{\log_e e}{\log_e 10} = \dfrac{\ln e}{\ln 10} = \dfrac{1}{\ln 10} = \dfrac{1}{2,3} = 0,434$)

(π.χ. $\ln 10 \equiv \log_e 10 = \dfrac{\log_{10} 10}{\log_{10} e} = \dfrac{\log 10}{\log e} = \dfrac{1}{\log e} = \dfrac{1}{0,434} = 2,3$)

Ενδεικτικές αποδείξεις

$\log_\beta\alpha = x \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \beta^x \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{\alpha} = \beta^{-x} \quad \Leftrightarrow \quad \log_\beta(\dfrac{1}{\alpha}) = -x = -\log_\beta\alpha$

$\log_\beta\alpha_1 = x_1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1 = \beta^{x_1}$

$\log_\beta\alpha_2 = x_2 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_2 = \beta^{x_2}$

$\alpha_1 \bullet \alpha_2 = \beta^{x_1} \bullet \beta^{x_2} = \beta^{x_1+x_2} \quad \Rightarrow \quad \log_\beta(\alpha_1 \bullet \alpha_2) = \log_\beta(\beta^{x_1+x_2}) = x_1 + x_2 = \log_\beta\alpha_1 + \log_\beta\alpha_2$

$\log_\beta(\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}) = \log_\beta(\alpha_1 \bullet \dfrac{1}{\alpha_2}) = \log_\beta\alpha_1 + \log_\beta(\dfrac{1}{\alpha_2}) = \log_\beta\alpha_1 - \log_\beta\alpha_2$

Εφαρμογή: Η μονάδα dB (decibel) και οι συναφείς μονάδες (dBm κλπ.)

Η μονάδα **dB** χρησιμοποιείται για να εκφράσει λόγους (κλάσματα) ομοειδών μεγεθών, αντιστοιχεί δηλαδή σε καθαρούς αριθμούς[7].

Για την περίπτωση κλασμάτων ισχύος, ο ορισμός του dB έχει ως εξής:

$$\frac{P}{P'} \text{ (σε dB)} = 10.\log_{10}\left(\frac{P}{P'}\right)$$

Αντιστρέφοντας τον παραπάνω ορισμό, προκύπτει ότι, αν η τιμή του λόγου $\dfrac{P}{P'}$ σε dB, παρασταθεί με ψ δηλαδή αν

$$\psi = \frac{P}{P'} \text{ (σε dB)} = 10.\log_{10}\left(\frac{P}{P'}\right)$$

τότε

$$\frac{P}{P'} = 10^{\psi/10}$$

Παράδειγμα

[7] Η χρήση λογαρίθμων (αντί για τους αρχικούς αριθμούς) διευκολύνει την αριθμητική διαχείριση πολύ μεγάλων ή πολύ μικρών λόγων (κλασμάτων). Πρόσθετο πλεονέκτημα της λογαρίθμησης είναι ότι «μετατρέπει» τα γινόμενα σε αθροίσματα και τα πηλίκα σε διαφορές.

Αν ψ = 3 dB, να βρεθεί η τιμή του λόγου $\frac{P}{P'}$.

Λύση

$\psi = 3$ dB $\quad\Rightarrow\quad \frac{\psi}{10} = 0{,}3 \quad\Rightarrow\quad \frac{P}{P'} = 10^{\psi/10} = 10^{0,3} = 2.$

Στον παρακάτω πίνακα, δίνονται αντιπροσωπευτικά παραδείγματα κλασμάτων ισχύος και οι αντίστοιχες τιμές τους σε dB.

$\frac{P}{P'}$	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	10	100	1000
$\frac{P}{P'}$ (dB)	−30	−20	−10	−9	−6	−3	0	3	6	9	10	20	30

Στον παραπάνω πίνακα μπορούν να γίνουν οι εξής επισημάνσεις:

- Διαδοχικός διπλασιασμός του λόγου P/P' (**2** → **4** → **8** κλπ.) ισοδυναμεί με διαδοχικές αυξήσεις κατά 3 dB (+**3 dB** → **+6 dB** → **+ 9 dB** κλπ. αντίστοιχα).
- Στα αντίστροφα κλάσματα (π.χ. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{100}$ κλπ.) οι τιμές σε dB είναι οι αντίθετες από τις αντίστοιχες τιμές του παραπάνω πίνακα (−3 dB, −20 dB κλπ.).
- Γενικά, για $\frac{P}{P'} > \mathbf{1}$, οι τιμές σε dB είναι **θετικές** ενώ για $\frac{P}{P'} < \mathbf{1}$, είναι **αρνητικές**.

Σε πολλές περιπτώσεις, στη θέση της ισχύος P' του παρονομαστή, χρησιμοποιείται μια συγκεκριμένη ισχύς αναφοράς P_{ref}, η οποία θεωρείται αντιπροσωπευτική για την εκάστοτε κατηγορία εφαρμογών. Στις ινοοπτικές επικοινωνίες, μια συνήθης τιμή αναφοράς είναι η $P_{ref} = 1$ mW. Στην περίπτωση αυτή, οποιαδήποτε άλλη τιμή ισχύος εκφράζεται σε dBm (όπου το "m" δηλώνει dB ως προς το 1 mW).

Συγκεκριμένα ισχύει ότι

$$\frac{P}{P_{ref}} \equiv \frac{P}{1\text{mW}}(\text{σε dBm}) = 10.\log_{10}\frac{P}{1\text{mW}}$$

Αντιστρέφοντας τον παραπάνω ορισμό, προκύπτει ότι, αν η τιμή του λόγου $\frac{P}{1\text{mW}}$ (σε dBm), παρασταθεί με «η» δηλαδή αν

$$\eta = \frac{P}{P_{ref}} \equiv \frac{P}{1\text{mW}}(\text{σε dBm}) = 10.\log_{10}\left(\frac{P}{1\text{mW}}\right)$$

τότε

$$\left(\frac{P}{1\text{mW}}\right) = 10^{\eta/10} \quad\Leftrightarrow\quad P = 10^{\eta/10}\bullet 1\text{mW}$$

Στον παρακάτω πίνακα, δίνονται αντιπροσωπευτικά παραδείγματα τιμών ισχύος σε υποπολλαπλάσια / πολλαπλάσια του mW καθώς και σε dBm.

P (mW)	1μW	10μW	100μW	1mW	2mW	10mW	100mW	1 W	2 W	10 W
P (dBm)	−30	−20	−10	0	3	10	20	30	33	40

Παράδειγμα

Σε μια (ινοοπτική) επικοινωνιακή ζεύξη, ο πομπός εκπέμπει ισχύ P_t = 2 mW ενώ το τηλεπικοινωνιακό μέσο (οπτικό καλώδιο) εισάγει απόσβεση α = 0,3 dB/km. Αν το μήκος της ζεύξης είναι L = 50 km, να υπολογιστεί η ισχύς P_r που λαμβάνεται από το δέκτη.

Υπολογισμός P_r σε dBm

Συνολική απώλεια A = α.L = (0,3 dB/km)x(50 km) = 15 dB

P_t = 2 mW = 3 dBm

P_r(dBm) = P_t(dBm) − A(dB) = 3 dBm − 15 dB = −12 dBm = 0,064 mW.

Υπολογισμός P_r σε mW

Απώλεια α = −0,3 dB/km σημαίνει μείωση της ισχύος στο $10^{-0,03}$ = 0,933 για κάθε km.

Συνεπώς για L = 50 km, η συνολική μείωση είναι

A = $0,933^{50}$ = 0,032 (= $10^{-1,5}$).

P_t = 2 mW

P_r(mW) = P_t(mW).A = 0,064 mW (= −12 dBm).

4. Μιγαδικοί αριθμοί (βασικά στοιχεία)

Γενικά

Μιγαδικός είναι ένας αριθμός της μορφής

$$\mathbf{z = x + jy}$$

όπου

- **j** είναι η **φανταστική μονάδα**, δηλαδή ο (φανταστικός) αριθμός για τον οποίο ισχύει ότι $\mathbf{j^2 = -1 \Leftrightarrow j =} \sqrt{-1}$ ([8]).
- Το **x = Re(z)** χαρακτηρίζεται ως το **πραγματικό** μέρος του μιγαδικού και **y = Im(z)** ως το **φανταστικό** του μέρος.

Ως **μέτρο** του μιγαδικού αριθμού z χαρακτηρίζεται ο (θετικός πραγματικός) αριθμός

$$|\mathbf{z}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Καρτεσιανή, πολική και τριγωνομετρική αναπαράσταση μιγαδικού αριθμού

Η **z = x + jy** χαρακτηρίζεται ως η **καρτεσιανή** μορφή του μιγαδικού αριθμού.

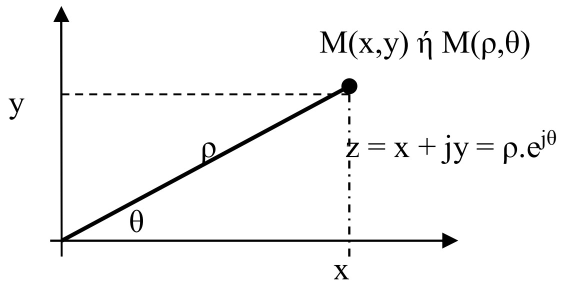
Ένας μιγαδικός αριθμός **z** μπορεί, εναλλακτικά, να γραφεί στη λεγόμενη **πολική** μορφή

$$z = \rho . e^{j\theta}$$

όπου **ρ** = |z| το **μέτρο** και **θ** το **όρισμα** (**φάση**) του εν λόγω μιγαδικού αριθμού.

Ένας μιγαδικός αριθμός z μπορεί να αναπαρασταθεί γεωμετρικά με ένα σημείο Μ με καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y) και πολικές συντεταγμένες (ρ, θ). Από το σχήμα που ακολουθεί, προκύπτει ότι ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

[8] Η φανταστική μονάδα συμβολίζεται είτε με j είτε με i.



$\rho \equiv \sqrt{x^2 + y^2} = |z| \qquad \theta = \arctan(\frac{y}{x})$

$x = \rho.\cos\theta \qquad y = \rho.\sin\theta$

<u>Σχόλιο:</u> Η σχέση $\theta = \arctan(\frac{y}{x})$ δίνει δύο (2) γωνίες, από τις οποίες επιλέγεται αυτή που είναι συμβατή με τα **πρόσημα** του πραγματικού και του φανταστικού μέρους (της καρτεσιανής μορφής). Για παράδειγμα, οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = \sqrt{2} + j\sqrt{2}$ και $z_2 = -\sqrt{2} - j\sqrt{2}$ δίνουν (και οι δύο) $\tan(\frac{y}{x}) = 1$. Ωστόσο, για τον z_1, είναι $\theta = 45^o$ (πραγματικό και φανταστικό μέρος θετικά, άρα η θ πρέπει να ανήκει στο 1^o τεταρτημόριο) ενώ για τον z_2, είναι $\theta = 225^o$ (πραγματικό και φανταστικό μέρος αρνητικά, άρα η θ πρέπει να ανήκει στο 3^o τεταρτημόριο).

Από τις σχέσεις αυτές, προκύπτει ένας μιγαδικός αριθμός **z** μπορεί να γραφεί με τους εξής ισοδύναμους τρόπους:

$$\mathbf{z = x + jy = \rho.e^{j\theta} = (\rho.\cos\theta) + j.(\rho.\sin\theta)} = \sqrt{x^2 + y^2}\, e^{j.\arctan(y/x)}$$

όπου:

- Η παράσταση **x + jy** χαρακτηρίζεται ως η **καρτεσιανή** μορφή του μιγαδικού αριθμού z.
- Η παράσταση $\mathbf{\rho.e^{j\theta}}$ χαρακτηρίζεται ως η **πολική** του μορφή του z.
- Η παράσταση **(ρ.cosθ) + j.(ρ.sinθ)** χαρακτηρίζεται ως η **τριγωνομετρική** του μορφή του z.

Αναφορικά με την **πολική μορφή** $\mathbf{\rho.e^{j\theta}}$ των μιγαδικών αριθμών, μπορούν να γίνουν τα παρακάτω **σχόλια**:

- Ένας **θετικός πραγματικός** αριθμός ($z = x + j.0 = x > 0$) έχει $\mathbf{\theta = 0}$. Αυτό μπορεί να εξηγηθεί είτε γεωμετρικά (ο θετικός πραγματικός αριθμός x βρίσκεται στο θετικό οριζόντιο ημιάξονα όπου $\theta = 0$) είτε τριγωνομετρικά αφού $\arctan(\frac{y}{x}) = 0$.
- Ένας **αρνητικός πραγματικός** αριθμός ($z = x + j.0 = x < 0$) έχει $\mathbf{\theta = \pi = 180^o}$. Αυτό μπορεί να εξηγηθεί είτε γεωμετρικά (ο αρνητικός πραγματικός αριθμός x βρίσκεται στον αρνητικό οριζόντιο ημιάξονα όπου $= \pi = 180^o$) είτε τριγωνομετρικά αφού $\arctan(\frac{y}{x}) = \pi = 180^o$).

- Ένας **φανταστικός** αριθμός (**z** = 0 + jy = **jy**) με **y > 0** έχει $\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{2} = 90^o}$. Αυτό μπορεί να εξηγηθεί είτε γεωμετρικά (ο **z** = **jy** με **y > 0**) βρίσκεται στον θετικό κατακόρυφο ημιάξονα (όπου $\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{2} = 90^o}$) είτε τριγωνομετρικά (αφού $\arctan(\frac{y}{x}) = \arctan(\infty) = \frac{\pi}{2} = 90^o$).
- Ένας **φανταστικός** αριθμός (**z** = 0 + jy = **jy**) με **y < 0** έχει $\boldsymbol{\theta = -\frac{\pi}{2} = -90^o}$. Αυτό μπορεί να εξηγηθεί είτε γεωμετρικά (ο **z** = **jy** με **y < 0**) βρίσκεται στον αρνητικό κατακόρυφο ημιάξονα (όπου $\boldsymbol{-\frac{\pi}{2} = -90^o}$) είτε τριγωνομετρικά (αφού $\arctan(\frac{y}{x}) = \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2} = -90^o$).
- Με βάση τα παραπάνω, και δεδομένου ότι $|\,j\,| = 1$, ισχύει ότι $j = e^{j(\pi/2)} = e^{j90^o}$.

«Απομονώνοντας» την ισότητα

$$\rho.e^{j\theta} = (\rho.\cos\theta) + j.(\rho.\sin\theta) = \rho(\cos\theta + j.\sin\theta)$$

και απλοποιώντας τον παράγοντα “ρ” προκύπτει η **ταυτότητα** του **Euler**

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j.\sin\theta$$

Παράδειγμα

Ο αριθμός z = –3 + j4 να γραφεί σε πολική μορφή.

Λύση

$z = -3 + j4 \;\Rightarrow\; |z| = \rho = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$ και $\theta = \arctan(\frac{4}{-3}) = -0{,}93 \text{ rad} = -53{,}3^o$

Άρα $z = -3 + j4 = 5.e^{j(-0{,}93)} = .e^{j(-53{,}3^o)}$

Σχόλιο: Η σχέση $\theta = \arctan(\frac{4}{-3})$ δίνει δύο (2) γωνίες, την $\theta = 143{,}3^o$ και την $\theta = -53{,}3^o$. Επιλέγεται η $\theta = -53{,}3^o = -0{,}93$ rad λόγω του ότι ο z έχει αρνητικό πραγματικό μέρος και θετικό φανταστικό και, συνεπώς, η γωνία του ανήκει στο 4^o τεταρτημόριο.

Συζυγής μιγαδικός αριθμός

Ο **συζυγής z*** ενός μιγαδικού αριθμού ορίζεται ως

$$z^* = x - jy = x + j(-y)$$

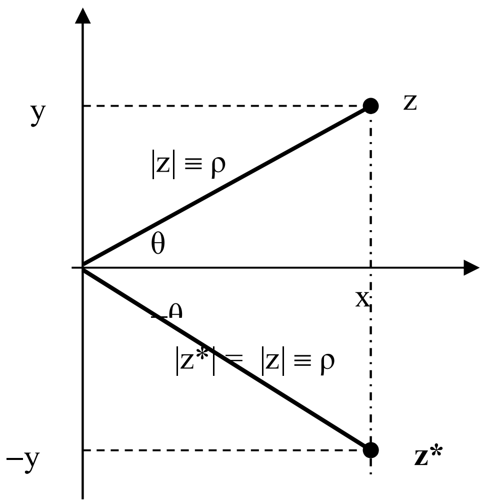
Σε σχέση με τον αρχικό μιγαδικό αριθμό **z**, ο συζυγής **συζυγής z*** έχει **ίδιο μέτρο** και **αντίθετο όρισμα** (φάση). Πράγματι

$$|z^*| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z| = \rho$$

$$\theta^* = \arctan(\frac{-y}{x}) = -\arctan(\frac{y}{x}) = -\theta$$

άρα

$$z^* = \rho e^{-j\theta}$$



Παράδειγμα

Ο αριθμός $z = -3 + j4$ να γραφεί σε πολική μορφή και να υπολογιστεί ο συζυγής του.

Λύση

$z = -3 + j4 \Rightarrow |z| = \rho = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$ και $\theta = \arctan(\frac{4}{-3}) = -0{,}93 \text{ rad} = -53{,}3^o$

Άρα $z = -3 + j4 = 5.e^{j(-0{,}93)} = .e^{j(-53{,}3^o)}$

$z^* = -3 - j4 = 5.e^{j(+0{,}93)} = .e^{j(+53{,}3^o)}$

(ο συζυγής μιγαδικός z* έχει ίδιο μέτρο με τον z και αντίθετη φάση)

Πράξεις μεταξύ μιγαδικών αριθμών

$$z_1 + z_2 = (x_1 + jy_1) + (x_2 + jy_2) = x_1 + jy_1 + x_2 + jy_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$
$$z_1 - z_2 = (x_1 + jy_1) - (x_2 + jy_2) = x_1 + jy_1 - x_2 - jy_2 = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$$

$$z_1 \bullet z_2 = (x_1 + jy_1) \bullet (x_2 + jy_2) = x_1x_2 + x_1jy_2 + jy_1x_2 + \mathbf{j^2}y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + j(x_1y_2 + y_1x_2)$$
$$z_1 \bullet z_2 = \rho_1.e^{j\theta_1}\ \rho_2.e^{j\theta_2} = \rho_1.\rho_2 e^{j(\theta_1+\theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + jy_1}{x_2 - jy_2} = \frac{(x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2)}{(x_2 - jy_2)(x_2 + jy_2)} = \frac{(x_1x_2 - y_1y_2 + j(x_1y_2 + y_1x_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$
$$z^n = \rho^n e^{j(n\theta)} = \rho^n[\cos(n\theta) + j.\sin(n\theta)]$$

Η **καρτεσιανή** μορφή των μιγαδικών αριθμών εξυπηρετεί περισσότερο στις πράξεις της **πρόσθεσης** και της **αφαίρεσης**. Με τη σειρά της, η **πολική** μορφή εξυπηρετεί στις πράξεις του **πολλαπλασιασμού** και της **διαίρεσης** καθώς και στην ύψωση σε **δύναμη**.

Παράδειγμα

Αν $z_1 = \sqrt{3} + j = 2\,.e^{j(\pi/6)} = 2\,.e^{j30^o}$ και $z_2 = 1 + j = \sqrt{2}\,.e^{j(\pi/4)} = \sqrt{2}\,.e^{j45^o}$, να υπολογιστούν οι μιγαδικοί αριθμοί

$z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \bullet z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, z_1^3

Λύση

$$z_1 + z_2 = (\sqrt{3} + 1) + j(1 + \sqrt{2})$$
$$z_1 - z_2 = (\sqrt{3} - 1) + j(1 - \sqrt{2})$$
$$z_1 \bullet z_2 = 2\sqrt{2}\ e^{j(\pi/6+\pi/4)} = 2\sqrt{2}\ e^{j(5\pi/12)}$$
$$z_1 \bullet z_2 = 2\sqrt{2}\ e^{j(30o+45o)} = 2\sqrt{2}\ e^{j75o}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}} e^{j(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}\ e^{j(-\frac{\pi}{12})}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}} e^{j(30^o - 45^o)} = \sqrt{2}\ e^{-j15^o}$$
$$z_1^3 = 2^3 e^{j3(\pi/6)} = 8e^{j(\pi/2)} = 8j$$

Παράδειγμα

Αν $z = 1 + j$ να προσδιοριστούν οι αριθμοί z^2 και z^3.

Λύση

$\rho \equiv |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\theta = \arctan(\frac{1}{1}) = 45^o = \frac{\pi}{4}$

Άρα

$z = \sqrt{2}\ e^{j(\frac{\pi}{4})} \Rightarrow z^2 = (\sqrt{2})^2 e^{j(2\frac{\pi}{4})} = 2\,e^{j\frac{\pi}{2}} = 2[\cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2}] = 2[0 + j1] = 2j$

$\Rightarrow z^3 = (\sqrt{2})^3 e^{j(3\frac{\pi}{4})} = 2\sqrt{2}\ e^{j\frac{3\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\ [\cos\frac{3\pi}{4} + j\sin\frac{3\pi}{4}] = 2\sqrt{2}\ [-\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}] = -2 + 2j$

Τα ίδια αποτελέσματα θα προέκυπταν και με χρήση των ταυτοτήτων $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ και $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$.
Πράγματι,
$(1 + i)^2 = 1^2 + 2\bullet 1\bullet i + i^2 = 1 + 2i + (-1) = 2i$
$(1 + i)^3 = 1^3 + 3\bullet 1^2\bullet i + 3\bullet 1\bullet i^2 + i^3 = 1 + 3i - 3 - i = -2 + 2j$

Για τους **συζυγείς** μιγαδικούς, ισχύουν οι σχέσεις:

$(z_1 \pm z_2)^* = z_1^* \pm z_2^*$

$(z_1 \bullet z_2)^* = z_1^* \bullet z_2^*$

$(z^n)^* = (z^*)^n$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1{}^*}{z_2{}^*}$$

καθώς και η σχέση

$z\bullet z^* = |z|^2 = x^2 + y^2$

Απόδειξη
Οι τέσσερις πρώτες σχέσεις αποδεικνύονται θεωρώντας
$z_1 = x_1 + jy_1 = \rho_1.e^{j\theta_1}$, $z_2 = x_2 + jy_2 = \rho_2.e^{j\theta_2}$ άρα
$z_1^* = x_1 - jy_1 = \rho_1.e^{-j\theta_1}$, $z_2^* = x_2 - jy_2 = \rho_2.e^{-j\theta_1}$
και χρησιμοποιώντας τις καρτεσιανές μορφές για το άθροισμα και τη διαφορά και τις πολικές μορφές για το γινόμενο, το πηλίκο και την ύψωση σε δύναμη.
Η σχέση $z\bullet z^* = |z|^2$ αποδεικνύεται θεωρώντας $z = x + jy$ άρα $z^* = x - jy$ οπότε
$z\bullet z^* = (x + jy)(x - jy) = x^2 - (jy)^2 = x^2 - j^2y^2 = x^2 - (-1)y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$.

Οι δυνάμεις $j^{4\kappa}$, $j^{4\kappa+1}$, $j^{4\kappa+2}$, $j^{4\kappa+3}$ ($\kappa = 0,1,2,\ldots$)

$j^{4\kappa} = (j^4)^\kappa = [(-1)^2]^\kappa = 1^\kappa = 1$
$j^{4\kappa+1} = j^{4\kappa} \bullet j = 1 \bullet j = j$
$j^{4\kappa+2} = j^{4\kappa} \bullet j^2 = 1 \bullet (-1) = -1$
$j^{4\kappa+3} = j^{4\kappa} \bullet j^3 = 1 \bullet (-j) = -j$

Παράδειγμα

Να υπολογιστούν οι αριθμοί j^3, j^4, j^{73}, j^{86}.

Λύση

$j^3 = j^{0\kappa+3} = j^0 \bullet j^3 = 1 \bullet (-j) = -j$
(Άλλος τρόπος: $j^3 = j^2 j = (-1)j = -j$)

$j^4 = j^{4 \bullet 1} = (j^4)^1 = 1^1 = 1$
(Άλλος τρόπος: $j^4 = (j^2)^2 = (-1)^2 = 1$)

$j^{74} = j^{4 \bullet 18+1} = j^{4 \bullet 18} \bullet j^1 = 1 \bullet (j) = -j$

$j^{86} = j^{4 \bullet 21+2} = j^{4 \bullet 21} \bullet j^2 = 1 \bullet (-1) = -1$

Ισότητα μεταξύ μιγαδικών αριθμών

Δύο μιγαδικοί αριθμοί είναι **ίσοι** όταν και μόνον όταν έχουν **ίσα πραγματικά** και **ίσα φανταστικά** μέρη. Δηλαδή

$$z_1 = z_2 \;\Leftrightarrow\; x_1 = x_2 \text{ και } y_1 = y_2$$

Επισημαίνεται ότι οι σχέσεις «**μεγαλύτερος** (>)» και «**μικρότερος** (<)» **δεν έχουν νόημα** για τους μιγαδικούς αριθμούς.

Παράδειγμα

Αν $z_1 = (2\alpha+\beta) + j(2\alpha-\beta)$ και $z_2 = (\alpha+\beta+2) + j(\alpha+\beta)$ και ισχύει ότι $z_1 = z_2$, να υπολογιστούν τα α, β.

Λύση

Αφού $z_1 = z_2$, θα πρέπει $(2\alpha+\beta) = (\alpha+\beta+2)$ και $(2\alpha-\beta) = (\alpha+\beta)$. Από τις σχέσεις αυτές, προκύπτει ότι $\alpha = 2$ και $\beta = 1$ οπότε για τους μιγαδικούς αριθμούς, ισχύει ότι $z_1 = z_2 = 5 + 3i$.

Η επίλυση της εξίσωσης $\zeta^n = z$ (z γνωστός μιγαδικός αριθμός)

Αν $z = x + jy = \rho.e^{j\theta}$ γνωστός μιγαδικός αριθμός, η εξίσωση $\zeta^n = z$ έχει τις λύσεις

$$\zeta_k = \sqrt[n]{\rho}\ [\cos\frac{2k\pi+\theta}{n} + j\sin\frac{2k\pi+\theta}{n}] \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

Σχόλια

- Η εξίσωση $\zeta^n = z$ έχει n λύσεις (όσες και ο εκθέτης του ζ, δηλαδή ο βαθμός της εξίσωσης). Για $k > n - 1$, οι λύσεις επαναλαμβάνονται
  Π.χ. για $k = n$, $\zeta_n = \sqrt[n]{\rho}\ [\cos\frac{2n\pi+\theta}{n} + j\sin\frac{2n\pi+\theta}{n}] = \sqrt[n]{\rho}\ [\cos(2\pi+\frac{\theta}{n}) + j\sin(2\pi+\frac{\theta}{n})] =$
  $\sqrt[n]{\rho}\ [\cos(\frac{\theta}{n}) + j\sin(\frac{\theta}{n})] = \zeta_0$.
- Οι λύσεις $\zeta_k = \sqrt[n]{\rho}\ [\cos\frac{2k\pi+\theta}{n} + j\sin\frac{2k\pi+\theta}{n}]$ βρίσκονται σε κύκλο ακτίνας $\sqrt[n]{\rho}$ και, μεταξύ τους, απέχουν κατά γωνία θ.
- Ενδιαφέρον έχει η περίπτωση που ο z είναι **θετικός πραγματικός** αριθμός (δηλαδή $x > 0$, $y = 0$ και $\theta = 0$, άρα $z = |z| = \rho$). Τότε $\zeta_k = \sqrt[n]{\rho}\ [\cos\frac{2k\pi}{n} + j\sin\frac{2k\pi}{n}]$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$
  Για παράδειγμα, η εξίσωση $\zeta^n = 8$ έχει λύσεις τις
  $\zeta_k = \sqrt[3]{8}\ [\cos\frac{2k\pi}{3} + j\sin\frac{2k\pi}{3}]$ $(k = 0, 1, 2)$ δηλαδή τις
  $\zeta_0 = 2$
  $\zeta_1 = 2[\cos\frac{2\pi}{3} + j\sin\frac{2\pi}{3}] = 2[-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}] = -\sqrt{3} + j$
  $\zeta_2 = 2[\cos\frac{4\pi}{3} + j\sin\frac{4\pi}{3}] = 2[-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}] = -\sqrt{3} - j$
  (ενώ, για την άλγεβρα των πραγματικών αριθμών, προβλέπεται μόνο η λύση $\zeta_0 = 2$).
- Στην περίπτωση που $z = 1$ (οπότε $x = 1$, $y = 0$ και $\theta = 0$, άρα $z = |z| = 1$) είναι
  $\zeta_k = [\cos\frac{2k\pi}{n} + j\sin\frac{2k\pi}{n}]$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$
  και οι λύσεις βρίσκονται επί του τριγωνομετρικού κύκλου (που έχει ακτίνα $r = 1$).

Η σχέση μεταξύ τριγωνομετρικού κύκλου και μιγαδικών αριθμών

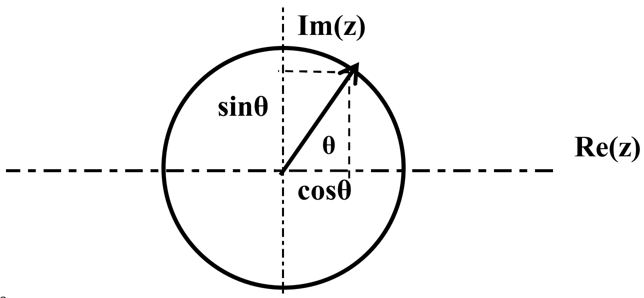
Στον τριγωνομετρικό κύκλο, ο **οριζόντιος** και ο **κατακόρυφος** άξονας μπορούν να θεωρηθούν ως ο άξονας των **πραγματικών** και **φανταστικών** αριθμών αντίστοιχα. Στο πλαίσιο αυτό, το σημείο (επί του τριγωνομετρικού κύκλου) που αντιστοιχεί στη γωνία θ μπορεί να θεωρηθεί ότι αντιπροσωπεύει έναν **μιγαδικό αριθμό z** ο οποίος (σε **τριγωνομετρική** και **πολική** μορφή, αντίστοιχα) εκφράζεται ως

$$z = \cos\theta + j.\sin\theta = 1.e^{j\theta}$$

αναπαράγοντας, ουσιαστικά, την **ταυτότητα** του **Euler**. Το **μέτρο** |ζ| είναι προφανώς

$$|z| = |e^{j\theta}| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$$

(που, ουσιαστικά, είναι η βασική τριγωνομετρική ταυτότητα $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$).



Ταυτότητες με το $e^{j\theta}$

Ξεκινώντας από την ταυτότητα του Euler,

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j.\sin\theta$$

προκύπτει ότι:

$$e^{-j\theta} = e^{j(-\theta)} = \cos(-\theta) + j.\sin(-\theta) = \cos\theta - j.\sin\theta$$

όπου έγινε και χρήση των σχέσεων $\cos(-\theta) = \cos\theta$ και $\sin(-\theta) = -\sin\theta$.

Οι δύο παραπάνω σχέσεις συνοψίζονται στην

$$e^{\pm j\theta} = \cos\theta \pm j.\sin\theta$$

Προσθέτοντας και αφαιρώντας, κατά μέλη, τις σχέσεις για τα $e^{+j\theta}$ και $e^{-j\theta}$ προκύπτει ότι:

$$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos\theta \qquad \Rightarrow \qquad \cos\theta = \frac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta})$$

$$e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j.\sin\theta \qquad \Rightarrow \qquad \sin\theta = \frac{1}{2\mathbf{j}}(e^{j\theta} - e^{-j\theta})$$

Η σχέση μεταξύ διανυσμάτων και μιγαδικών αριθμών

Ένας μιγαδικός αριθμός $\mathbf{z = x + jy}$ αντιστοιχεί σε **διάνυσμα** $\underline{\mathbf{v}}$ που έχει ως **αρχή** το σημείο **O(0,0)** (αρχή των αξόνων) και **πέρας** το σημείο **M** με καρτεσιανές συντεταγμένες (**x, y**). Δηλαδή

$$z = x + jy \;\; \leftrightarrow \;\; \underline{\mathbf{v}} \equiv \underline{\mathbf{OM}} \quad \text{όπου M το σημείο } (x, y)$$

Το άθροισμα και η διαφορά των μιγαδικών αριθμών

$$z_1 = x_1 + jy_1$$
$$z_2 = x_2 + jy_2$$

αντιστοιχεί στο άθροισμα και τη διαφορά των διανυσμάτων $\underline{\mathbf{v_1}} \equiv \underline{\mathbf{OM_1}}$ και $\underline{\mathbf{v_2}} \equiv \underline{\mathbf{OM_2}}$ όπου M_1 το σημείο (x_1, y_1) και M_2 το σημείο (x_2, y_2). Δηλαδή

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2) \;\; \leftrightarrow \;\; \underline{\mathbf{v_1}} + \underline{\mathbf{v_2}} \equiv \underline{\mathbf{OM_1}} + \underline{\mathbf{OM_2}}$$
$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2) \;\; \leftrightarrow \;\; \underline{\mathbf{v_1}} - \underline{\mathbf{v_2}} \equiv \underline{\mathbf{OM_1}} - \underline{\mathbf{OM_2}}$$

Ασκήσεις

Άσκηση

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = -1 + j\sqrt{3}$.

(α) Να υπολογιστούν οι αριθμοί $-z$, z^*, $|z|$, $|z|^2$, $z \bullet z^*$

(β) Να διαπιστωθεί ότι $z \bullet z^* = |z|^2$.

(γ) Να παρασταθούν γεωμετρικά οι αριθμοί z, $-z$, z^* σε καρτεσιανό σύστημα.

(δ) Ο z να γραφεί σε πολική μορφή.

Υπόδειξη

(α) $|z| = \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{1+3} = 2$

(β) $z \bullet z^* = (-1 + j\sqrt{3})(-1 - j\sqrt{3}) = (-1)^2 - (j\sqrt{3})^2 = 1 - j^2(\sqrt{3})^2 = 4 = |z|^2$

(δ) $\rho \equiv |z| = 2$, $\tan\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3} \Rightarrow \theta = -60^o$

Άρα $z = 2e^{-j60^o}$

Άσκηση

Οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 1 + j$, $z_2 = 1 - j$, $z_3 = -1 + j$, $z_4 = -1 - j$ να γραφούν σε πολική μορφή.

Υπόδειξη

$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = \sqrt{2}$, $\theta_1 = 45^o$, $\theta_2 = -45^o$, $\varphi_3 = 135^o$, $\theta_2 = -225^o$.

Άσκηση

Ο μιγαδικός αριθμός $z = 2e^{j30^o}$ να γραφεί σε καρτεσιανή μορφή.

Λύση

Θα χρησιμοποιηθεί η ταυτότητα του Euler για $\theta = 30^o$.

$2e^{j30^o} = 2(\cos 30^o + j\sin 30^o) = 2(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + j\dfrac{1}{2}) = \sqrt{3} + j$

Άσκηση

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 1 + j\sqrt{3}$ και $z_2 = 1 + j$.

(α) Να υπολογιστούν οι αριθμοί $z_1 + z_2$ και $z_1 - z_2$ σε καρτεσιανή μορφή.

(β) Να υπολογιστούν οι αριθμοί $z_1 \bullet z_2$ και $\dfrac{z_1}{z_2}$ σε καρτεσιανή μορφή.

(γ) Να υπολογιστούν οι αριθμοί $z_1 \bullet z_2$ και $\dfrac{z_1}{z_2}$ σε πολική μορφή.

Υπόδειξη

(β) $z_1 \bullet z_2 = (1 + j\sqrt{3})(1 + j) = (1 - \sqrt{3}) + j(1 + \sqrt{3})$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+j\sqrt{3}}{1+j} = \frac{(1+j\sqrt{3})(1-j)}{(1+j)(1-j)} = \frac{(\sqrt{3}+1)+j(\sqrt{3}-1)}{2} = \frac{(\sqrt{3}+1)}{2} + j\frac{(\sqrt{3}-1)}{2}$$

(γ) $z_1 = 2e^{j60^o}$, $z_2 = \sqrt{2}\, e^{j45^o}$

$z_1 \bullet z_2 = 2\sqrt{2}\, e^{j105^o}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{j60o}}{\sqrt{2}e^{j45o}} = \sqrt{2}\, e^{j15^o}$$

Άσκηση

(α) Να αποδειχθεί ότι $\dfrac{1}{j} = -j$.

(β) Να υπολογιστεί ο $z = (1 + j)^2$.

Λύση

(α) $\dfrac{1}{j} = \dfrac{-j}{j(-j)} = \dfrac{-j}{-j^2} = \dfrac{-j}{1} = -j$.

(β) $z = (1 + j)^2 = 1^2 + 2j + j^2 = 1 + 2j - 1 = 2j$

5. Συναρτήσεις (βασικά στοιχεία)

5.1. Παραγώγιση συναρτήσεων

Ορισμός παραγώγου

Η **παράγωγος** $f'(x) \equiv \dfrac{df}{dx}$ (σε τυχαίο σημείο x) μιας συνάρτησης f(x) ορίζεται όπως παρακάτω:

$$f'(x) \equiv \frac{df}{dx} = \lim_{(h\to 0)} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Η παράγωγος **εκφράζει** τη μεταβολή **Δf** που προκαλείται σε μία συνάρτηση f(x) από τη μεταβολή **Δx** της ανεξάρτητης μεταβλητής x.

Παράδειγμα:
Έστω ότι ένας χώρος περιέχει **φορτίο** q(t) που μεταβάλλεται με το χρόνο. Τότε το **ρεύμα** i(t) που εκρέει από το χώρο ή εισρέει σε αυτόν είναι ίσο με $i(t) = q'(t) = \dfrac{dq}{dt}$.

Π.χ. αν $q(t) = \dfrac{t^2}{4}$ για $0 \le t \le 10$ sec $\Rightarrow$ $i(t) = q'(t) = \dfrac{2t}{4}$ (για $0 \le t \le 10$). Αυτό σημαίνει ότι, κατά το χρονικό διάστημα [0 , 10sec] το φορτίο q(t) μεταβάλλεται (παραβολικά) από 0 έως 25 Cb ενώ, ταυτόχρονα, το ρεύμα μεταβάλλεται (γραμμικά) από 0 έως 5 A. Για t > 10 sec, οπότε το φορτίο σταθεροποιείται στα 25 Cb, το ρεύμα είναι $i(t) = q'(t) = (25)' = 0$ (δηλαδή είναι μηδενικό).

Βασικοί κανόνες παραγώγισης

$$[cf(x)]' = cf'(x)$$

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

$$[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$$

$$[f(x)\bullet g(x)]' = f'(x)\bullet g(x) + f(x)\bullet g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

$[f(g(x))]' = f'(g(x))\bullet g'(x)$ (παραγώγιση σύνθετης συνάρτησης) [9]

[9] Η σχέση δηλώνει ότι η σύνθετη συνάρτηση f(g(x)) παραγωγίζεται ως προς τη g(x) (που, προσωρινά, θεωρείται ως ανεξάρτητη μεταβλητή) και, στη συνέχεια, η g(x) παραγωγίζεται ως προς x.

Παραγώγιση βασικών συναρτήσεων

$(c)' = 0$

$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$ ([10])

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(e^{x})' = e^{x}$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

Παράδειγμα παραγώγισης πηλίκου συναρτήσεων

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'(\cos x) - (\sin x)(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{(\cos x)(\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Παράδειγμα παραγώγισης σύνθετης συνάρτησης

$$[\ln(\cos x)]' = \frac{1}{\cos x}(\cos x)' = \frac{1}{\cos x}(-\sin x) = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

Μελέτη συνάρτησης (και σχεδίαση της γραφικής της παράστασης)

Η μελέτη συνάρτησης γίνεται με βάση τα παρακάτω:

- ✓ Στα **σημεία** x_k όπου $f'(x_k) = 0$, η συνάρτηση παρουσιάζει
  - **μέγιστο** (max), αν, στο συγκεκριμένο σημείο x_k, είναι $f''(x_k) < 0$
  - **ελάχιστο** (min), αν στο συγκεκριμένο σημείο x_k, είναι $f''(x_k) > 0$
  - σημείο **καμπής**, αν στο συγκεκριμένο σημείο x_k, είναι $f''(x_k) = 0$.

- ✓ Αναφορικά με το πρόσημο των $f'(x)$ και $f''(x)$, ισχύουν τα εξής:
  - Στα διαστήματα όπου $f'(x) > 0$, η συνάρτηση είναι γνησίως **αύξουσα** ($\uparrow$).
  - Στα διαστήματα όπου $f'(x) < 0$, η συνάρτηση είναι γνησίως **φθίνουσα** ($\downarrow$).
  - Στα διαστήματα όπου $f''(x) > 0$, η συνάρτηση είναι **κυρτή** ($\cup$).
  - Στα διαστήματα όπου $f''(x) < 0$, η συνάρτηση είναι **κοίλη** ($\cap$).

Με βάση τα παραπάνω, έχουμε τις εξής περιπτώσεις

- ✓ Στα διαστήματα όπου $f'(x) > 0$ και $f''(x) > 0$, η συνάρτηση είναι **αύξουσα** και **κυρτή** ( ).
- ✓ Στα διαστήματα όπου $f'(x) > 0$ και $f''(x) < 0$, η συνάρτηση είναι **αύξουσα** και **κοίλη** ( ).
- ✓ Στα διαστήματα όπου $f'(x) < 0$ και $f''(x) > 0$, η συνάρτηση είναι **φθίνουσα** και **κυρτή** ( ).
- ✓ Στα διαστήματα όπου $f'(x) < 0$ και $f''(x) < 0$, η συνάρτηση είναι **φθίνουσα** και **κοίλη** ( ).

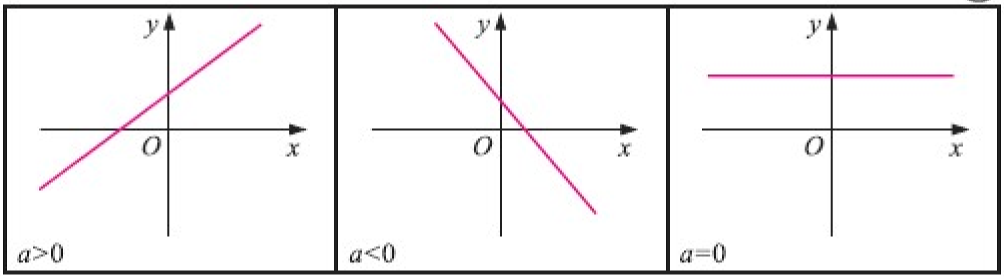
---

[10] Άμεση συνέπεια είναι η σχέση $(x)' = 1$.

Οι **γραφικές παραστάσεις** ορισμένων **βασικών συναρτήσεων** φαίνονται στα σχήματα που ακολουθούν:

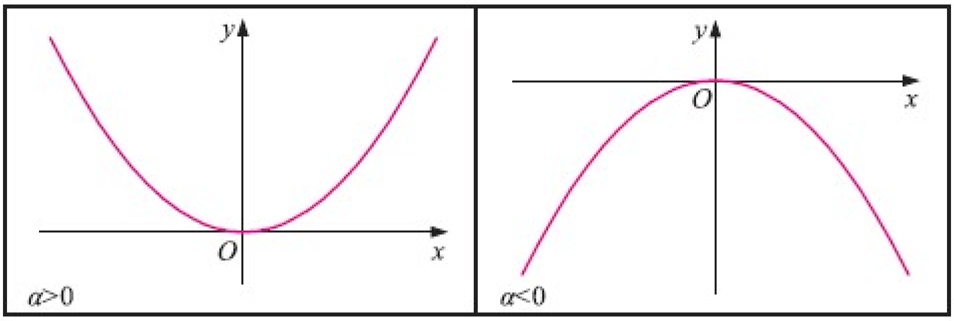
Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$.

11

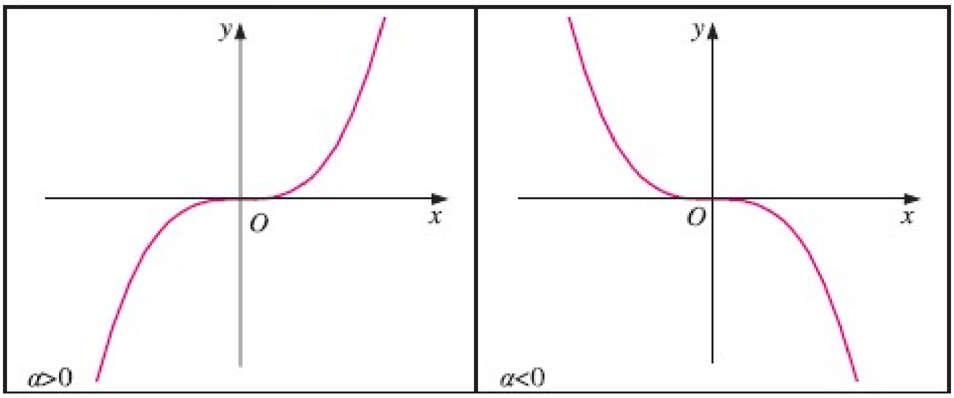


Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2,\ \alpha \neq 0$.

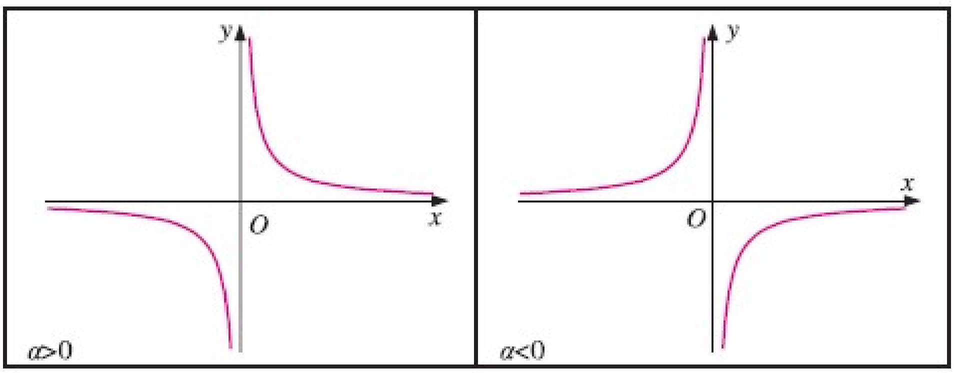
12



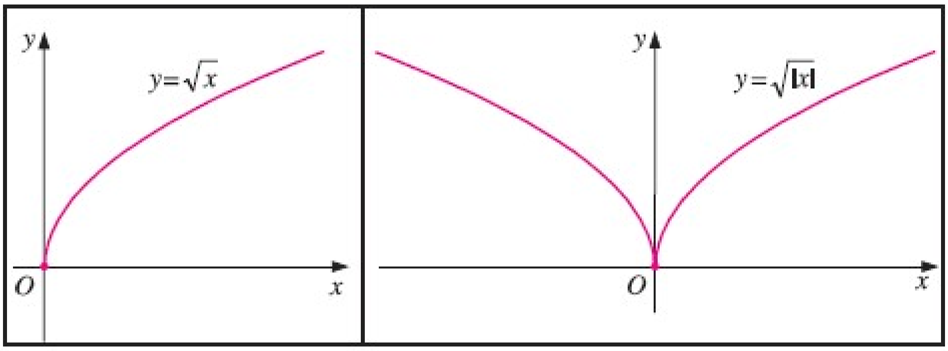
Η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3,\ \alpha \neq 0$.



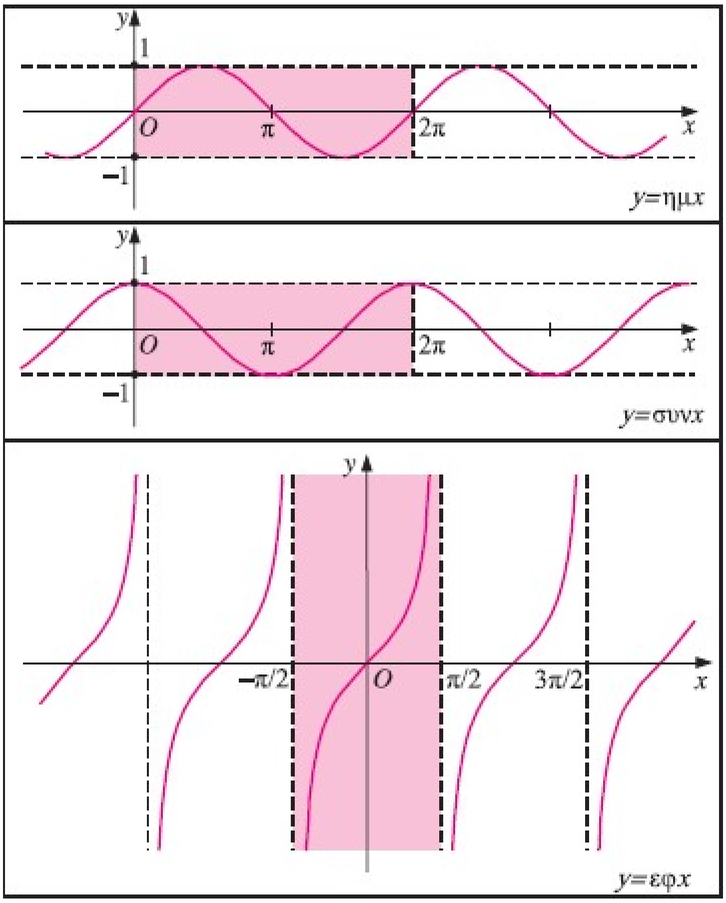
Η ρητή συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha}{x},\ \alpha \neq 0$.



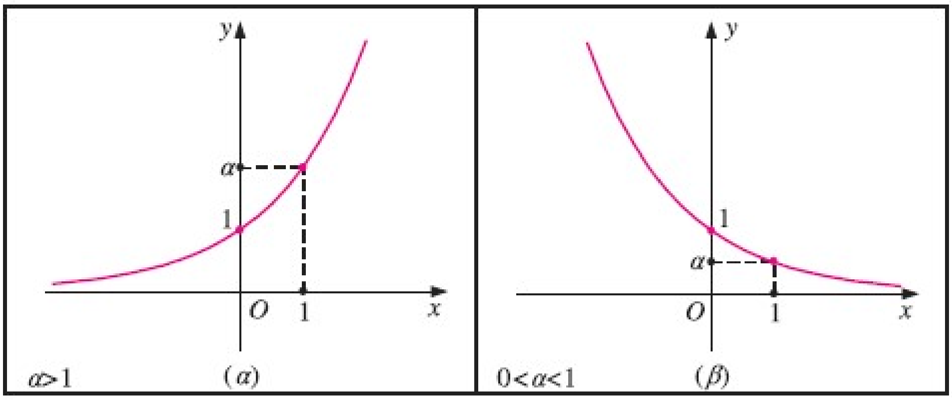
Οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\sqrt{|x|}$.



Οι τριγωνικές συναρτήσεις: $f(x)$ = ημx, $f(x)$ = συνx, $f(x)$ = εφx.

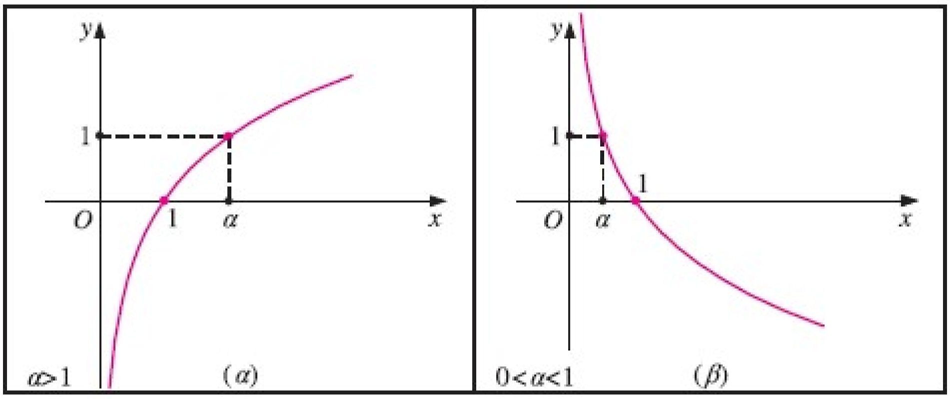


Η εκθετική συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, $0 < \alpha \neq 1$.



Σημαντική ειδική περίπτωση είναι η **f(x) = e^x^** (η γραφική παράσταση είναι παρόμοια με αυτήν του παραπάνω σχήματος (α) με **α = e**)

Η λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = \log_\alpha x$, $0 < \alpha \neq 1$.



Σημαντική ειδική περίπτωση είναι η **f(x) = lnx** (η γραφική παράσταση είναι παρόμοια με αυτήν του παραπάνω σχήματος (α) με **α = e**)

5.2. Ολοκλήρωση συναρτήσεων

Ορισμός ολοκληρώματος

Το (αόριστο) **ολοκλήρωμα** $F(x) = \int f(x)dx$ μιας συνάρτησης f(x) είναι μια νέα συνάρτηση F(x) τέτοια ώστε $F'(x) = f(x)$. Δηλαδή

$$F(x) = \int f(x)dx + c \quad \Leftrightarrow \quad F'(x) = f(x) \qquad ([11])$$

όπου "c" είναι η σταθερά ολοκλήρωσης (προστίθεται λόγω του ότι, κατά την παραγώγιση της F(x), μηδενίζεται).

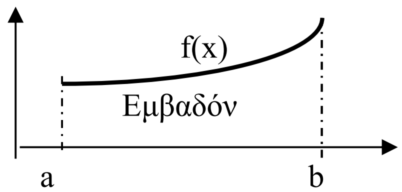
Δηλαδή, το (αόριστο) **ολοκλήρωμα** $\int f(x)dx$ μιας συνάρτησης είναι μια νέα συνάρτηση F(x) τέτοια ώστε η παραγωγός της να είναι η f(x).

Παράδειγμα: Αν $f(x) = 2x$, τότε $F(x) = \int f(x)dx + c = x^2 + c$ (δεδομένου ότι $F'(x) = f(x) = (x^2)' + c' = 2x + 0 = 2x$).

Το **ορισμένο** ολοκλήρωμα προκύπτει από την ολοκλήρωση σε συγκεκριμένο διάστημα [a , b] και είναι η τιμή που προκύπτει με βάση τη σχέση που ακολουθεί.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad ([12])$$

Το ορισμένο ολοκλήρωμα εκφράζει το **εμβαδόν** που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f(x) (για το διάστημα [a , b] και τον οριζόντιο άξονα x'x.



Παράδειγμα: Έστω ότι σε ένα χώρο εισρέει ρεύμα i(t) = 2t (A) για το χρονικό διάστημα $0 \le t \le 5$ sec. Τότε το φορτίο q(t) που συσσωρεύεται στο χώρο είναι

$$q = \int_0^5 i(t)dt = \int_0^5 2tdt = [t^2]_0^5 = 5^2 - 0 = 25 \text{ Cb}.$$

[11] Η F(x) ονομάζεται και «παράγουσα συνάρτηση».
[12] Επισημαίνεται ότι λόγω της αφαίρεσης F(b) – F(a), στο ορισμένο ολοκλήρωμα δεν εμφανίζεται σταθερά ολοκλήρωσης.

Βασικοί κανόνες ολοκλήρωσης

$$\int f(x).d(\mathbf{k}x) = \mathbf{k}.\int f(x).dx$$

$$\int kf(x).dx = \mathbf{k}.\int f(x).dx$$

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x).dx + \int g(x).dx$$

$$\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x).dx - \int g(x).dx$$

$$\int f'(x).g(x).dx = f(x).g(x) - \int f(x).g'(x).dx$$

Ολοκλήρωση βασικών συναρτήσεων[13]

$$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \qquad (\alpha \neq -1) \qquad ([14])$$

με άμεση συνέπεια τις σχέσεις

$$\int dx = x$$

$$\int k.dx = k.\int dx = kx$$

$$\int x^{-1}dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln|x|$$

$$\int \sin x.dx = -\cos x$$

$$\int \cos x.dx = \sin x$$

$$\int e^{x}.dx = e^{x} \qquad ([15])$$

Παράδειγμα: $\int e^{\alpha x}.dx = \frac{1}{\alpha}\int e^{\alpha x}.d(\alpha x) = \frac{1}{\alpha}\, e^{\alpha x}$

όπου χρησιμοποιήθηκαν οι σχέσεις $\int f(x).d(\mathbf{k}x) = \mathbf{k}.\int f(x).dx$ και $\int e^{x}.dx = e^{x}$.

Παράδειγμα: $\int_{0}^{1} e^{x}dx = [e^{x}]_{0}^{1} = e^{1} - e^{0} = e - 1$

[13] Στο δεύτερο (δεξί) μέλος των σχέσεων, πρέπει να προστεθεί και σταθερά ολοκλήρωσης “c” η οποία, για λόγους απλότητας, παραλείπεται..

[14] Ο περιορισμός $\alpha \neq -1$ σχετίζεται με το γεγονός ότι ο παρονομαστής $\alpha+1$ πρέπει να είναι $\neq 0$.

[15] Το γεγονός ότι η συνάρτηση $f(x) = e^{x}$ παραμένει «αναλλοίωτη» τόσο κατά την παραγώγιση όσο και κατά την ολοκλήρωσή της είναι ένας από τους λόγους της χρήσης εκθετικών συναρτήσεων στη μελέτη των σημάτων.

Ταυτότητες με **ορισμένα** ολοκληρώματα τριγωνομετρικών συναρτήσεων

$\int_{(0,2\pi)} \mathbf{\sin\theta.d\theta} = [\cos\theta]_0^{2\pi} = \cos(2\pi) - \cos(0) = 1 - 1 = \mathbf{0}$

$\int_{(0,2\pi)} \mathbf{\cos\theta.d\theta} = = [\sin\theta]_0^{2\pi} = [\sin(2\pi) - \sin(0)] = 0 - 0 = \mathbf{0}$

$\int_{(0,2\pi)} \mathbf{e^{j\theta}d\theta} = \int_{(0,2\pi)} \cos\theta.d\theta + j.\int_{(0,2\pi)} \sin\theta.d\theta = [\sin\theta]_0^{2\pi} - j[\cos\theta]_0^{2\pi} = [\sin(2\pi) - \sin(0)] - j[\cos(2\pi) - \cos(0)] = [0 - 0] - j[1 - 1] = \mathbf{0}$

$\int_{(0,2\pi)} \mathbf{\cos^2\theta.d\theta} = \int_{(0,2\pi)} \frac{1+\cos(2\theta)}{2} d\theta = \int_{(0,2\pi)} \frac{1}{2} d\theta =$

$\int_{(0,2\pi)} \frac{\cos(2\theta)}{2} d\theta = [\frac{\theta}{2}]_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}[\sin(2\theta)]_0^{2\pi} = (\frac{2\pi}{2} - 0) + \frac{1}{4}[\sin(2.2\pi) - \sin(2\bullet 0)] =$

$\pi + \frac{1}{4}[0 - 0] = \boldsymbol{\pi}$ ([16])

Θεωρώντας $\theta = 2\pi.f_n t = 2\pi.nf_0 t$ όπου $f_n = nf_0$ η συχνότητα της n-οστής αρμονικής και λαμβάνοντας υπόψη ότι η περιοχή ολοκλήρωσης [0, 2nπ] ως προς θ, αντιστοιχεί στην περιοχή ολοκλήρωσης [0, nT] ως προς t, προκύπτει ότι:

$\int_{(0,T)}\sin(2\pi.nf_0t).dt = [\cos(2\pi.nf_0t)]_{(0,T)} = 0$

$\int_{(0,T)}\cos(2\pi.nf_0t).dt = [\sin(2\pi.nf_0t)]_{(0,T)} = 0$

$\int_{(0,T)}e^{j2\pi.nf_0t}.dt = \int_{(0,T)}\cos(2\pi.nf_0t).dt + j.\int_{(0,T)}\sin(2\pi.nf_0t).dt = 0$

Για **m≠n**

$\int_{(0,T)} \sin(2\pi.mf_0t).\sin(2\pi.nf_0t).dt = \int_{(0,T)} \cos(2\pi.mf_0t).\cos(2\pi.nf_0t).dt = \int_{(0,T)} \sin(2\pi.mf_0t).\cos(2\pi.nf_0t).dt = 0$

Για **m=n**

$\int_{(0,T)} A^2\cos^2(2\pi.nf_0t).dt = \int_{(0,T)} A^2 \frac{1+\cos(2.2\pi.f_n t)}{2} dt = \frac{A^2T}{2}$

$\int_{(0,T)} A^2\sin^2(2\pi.nf_0t).dt = \int_{(0,T)} A^2 \frac{1-\cos(2.2\pi.f_n t)}{2} dt = \frac{A^2T}{2}$

$\int_{(0,T)} \sin(2\pi.nf_0t).\cos(2\pi.nf_0t).dt = \mathbf{0}$

Για **m≠n**: $\int_{(0,T)} e^{-j2\pi.mf_0t}e^{+j2\pi.nf_0t}.dt = 0$

Για **m=n**: $\int_{(0,T)} e^{-j2\pi.nf_0t}e^{+j2\pi.nf_0t}.dt = \int_{(0,T)} dt = T$

[16] Γενικά, $\int_{(0,L)}\cos^2x.dx = \frac{L}{2}$

5.3. Ειδικές συναρτήσεις

Η κρουστική συνάρτηση δ(x)

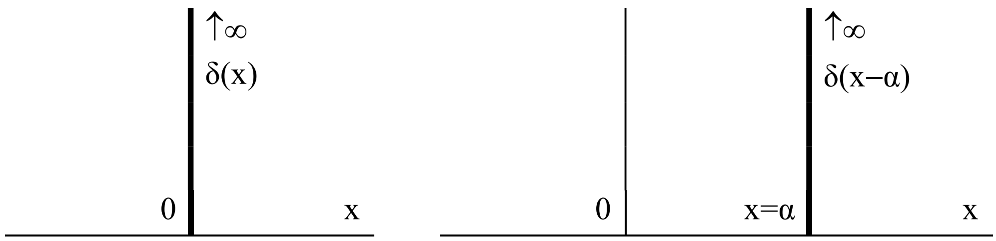
Η κρουστική συνάρτηση δ(x) ορίζεται όπως παρακάτω:

$$\delta(x) = 0, \text{ για } x \neq 0 \quad \text{έτσι ώστε} \quad \int_{(-\infty,+\infty)} \delta(x).dx = \int_{0-}^{0+} \delta(x)dx = 1 \qquad (\Pi.63)$$

Οι παραπάνω σχέσεις δηλώνουν ότι η κρουστική συνάρτηση δ(x) έχει μηδενική τιμή εκτός αν x = 0 οπότε και λαμβάνει μια άπειρα μεγάλη τιμή, κατά τέτοιο όμως τρόπο, ώστε η επιφάνεια που περικλείει (όπως εκφράζεται από το ολοκλήρωμα $\int \delta(x).dx = \int_{0-}^{0+} \delta(x)dx$) να είναι ίση με 1.

Γενίκευση του παραπάνω τύπου αποτελεί η εξίσωση

$$\delta(x-\alpha) = 0, \text{ για } x \neq \alpha \quad \text{έτσι ώστε} \quad \int_{(-\infty,+\infty)} \delta(x-\alpha).dx = \int_{\alpha-}^{\alpha+} \delta(x)dx = 1$$



Δύο βασικές ιδιότητες της κρουστικής συνάρτησης είναι οι εξής:

$$\int \delta(x).f(x).dx = f(0)$$

$$\int \delta(x-\alpha).f(x).dx = f(\alpha)$$

Η συνάρτηση δειγματοληψίας Sa(x)

Η συνάρτηση δειγματοληψίας Sa(x) ορίζεται από τον τύπο:

$$Sa(x) = \frac{\sin x}{x}$$

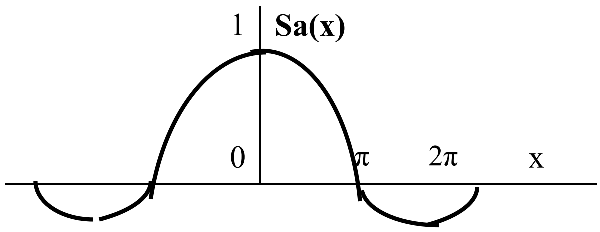
Για την παραπάνω συνάρτηση ισχύουν τα εξής:

- Η μέγιστη τιμή $\mathbf{Sa_{max}}$ προκύπτει για **x = 0**. Συγκεκριμένα ισχύει ότι:

$$Sa_{max} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{x'} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{1}\right) = 1$$

- Η συνάρτηση **μηδενίζεται** για **x = nπ** (**n≠0**). Ισχύει δηλαδή ότι

$$Sa(n\pi) = 0 \qquad (n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$$



6. Η εξίσωση ($2^{ου}$ βαθμού) $ax^2 + bx + c = 0$

Οι **ρίζες** ρ_1, ρ_2 της εξίσωσης $2^{ου}$ βαθμού (ή τριωνυμικής εξίσωσης),

$$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$$

δίνονται από τους τύπους

$$\rho_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\rho_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

όπου η ποσότητα $\mathbf{\Delta = b^2 - 4ac}$ ορίζεται ως η διακρίνουσα του τριωνύμου.

Με τη σειρά της, η τριωνυμική συνάρτηση (τριώνυμο) $f(x) = ax^2 + bx + c$ μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\mathbf{f(x)} = ax^2 + bx + c = \mathbf{a(x - \rho_1)(x - \rho_2)}$$

Για τη **διακρίνουσα Δ** και τις **ρίζες** της δευτεροβάθμιας εξίσωσης, υπάρχουν οι παρακάτω **περιπτώσεις**:

- $\mathbf{\Delta > 0} \;\Rightarrow\; \rho_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\ ,\ \rho_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

  οι ρ_1, ρ_2 είναι **πραγματικές** ($\rho_1, \rho_2 \in \Re$) και διαφορετικές ($\boldsymbol{\rho_1 \neq \rho_2}$)
- $\mathbf{\Delta = 0} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\rho_1 = \rho_2} = \dfrac{-b}{2a}$ (μία **διπλή πραγματική** ρίζα ρ)
- $\mathbf{\Delta < 0} \;\Rightarrow\; \rho_1 = \dfrac{-b + j\sqrt{|\Delta|}}{2a}\ ,\ \rho_2 = \dfrac{-b - j\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ (ρίζες **συζυγείς μιγαδικές**)

Σε κάθε περίπτωση, για τις ρίζες ρ_1, ρ_2 ισχύουν οι σχέσεις

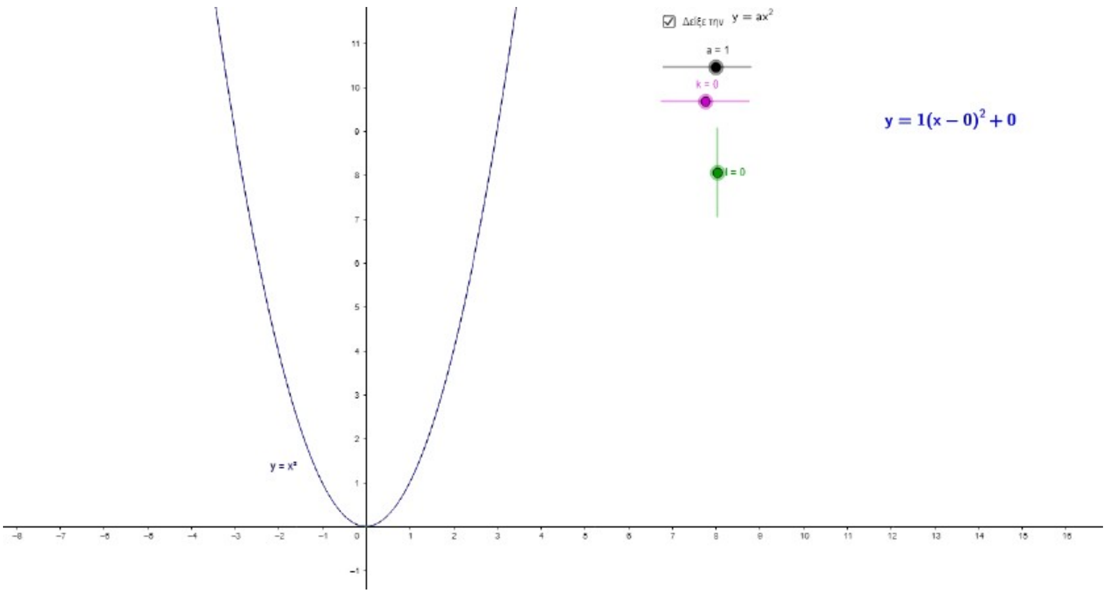
$$\rho_1 + \rho_2 = -\frac{b}{a}\quad ,\quad \rho_1 \cdot \rho_2 = \frac{c}{a}$$

Η τριωνυμική συνάρτηση (τριώνυμο) $f(x) = ax^2 + bx + c$ παρουσιάζει **ακρότατο** για

$$x = x_o = -\frac{b}{2a} = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \qquad \text{(το } x_o \text{ είναι το μέσο μεταξύ των δύο ριζών)}$$

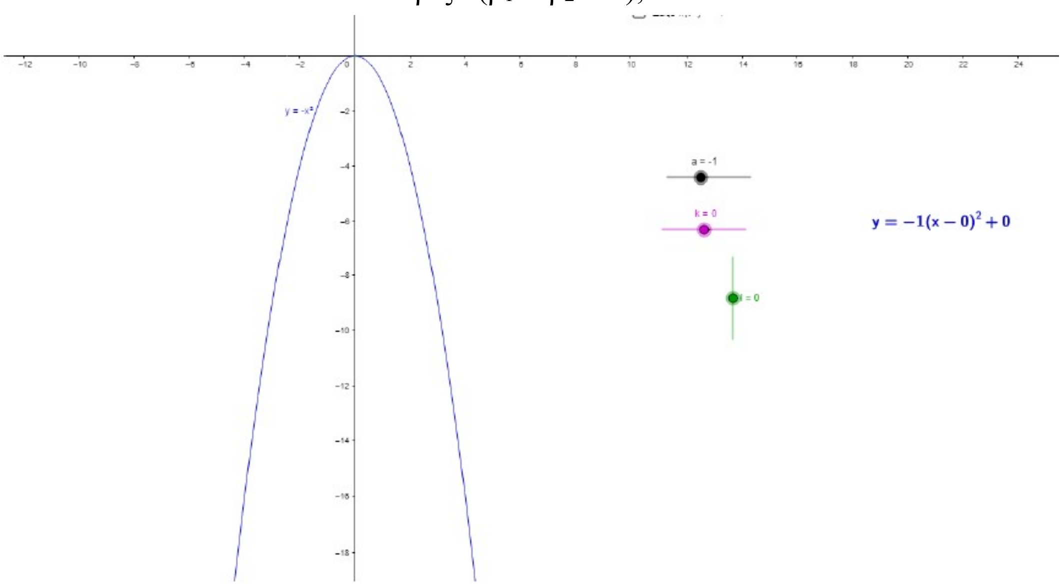
- Αν $\mathbf{a > 0}$, το ακρότατο είναι **ελάχιστο** (min).
- Αν $\mathbf{a < 0}$, το ακρότατο είναι **μέγιστο** (max).

Αυτό μπορεί εύκολα να διαπιστωθεί, δεδομένου ότι $f'(x) = 2ax + b$ (μηδενίζεται για $x = x_o = -\dfrac{b}{2a}$) ενώ $f''(x) = 2a$ οπότε, αν $\mathbf{a > 0} \Rightarrow \mathbf{f''(x) > 0}$ (το ακρότατο είναι **ελάχιστο**) ενώ, αν $\mathbf{a < 0} \Rightarrow$ $\mathbf{f''(x)} < 0$ (το ακρότατο είναι **μέγιστο**).



Γραφική παράσταση της $f(x) = x^2$

Επειδή $a = 1 > 0$, η $f(x)$ παρουσιάζει ελάχιστο και επειδή $\Delta = 0$, η εξίσωση $x^2 = 0$ έχει μία διπλή ρίζα ($\rho_1 = \rho_2 = 0$),



Γραφική παράσταση της $f(x) = -x^2$

Επειδή $a = -1 < 0$, η $f(x)$ παρουσιάζει μέγιστο και επειδή $\Delta = 0$, η εξίσωση $x^2 = 0$ έχει μία διπλή ρίζα ($\rho_1 = \rho_2 = 0$),

Γραφική παράσταση της $f(x) = x^2 - 10x + 24$:

Εδώ $\Delta = b^2 - 4ac = 4 > 0$ οπότε το τριώνυμο έχει δύο πραγματικές (και διαφορετικές) ρίζες ($\rho_1 = 4$, $\rho_2 = 6$) που είναι τα σημεία τομής με τον οριζόντιο άξονα x'x).

Επειδή $a = 1 > 0$, η f(x) παρουσιάζει ελάχιστο (για $x = x_o = 5 = \dfrac{\rho_1 + \rho_2}{2}$

Παράδειγμα

Να επιλυθούν οι παρακάτω γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 2ης τάξης

(α) $x^2 - 5x + 6 = 0$

(β) $x^2 - 4x + 4 = 0$

(γ) $x^2 + 2x + 5 = 0$

(α) $a = 1\ ,\ b = -5\ ,\ c = 6 \ \Rightarrow\ \Delta = b^2 - 4ac = 1 > 0 \ \Rightarrow\ \rho_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 3\ ,\ \rho_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = 2$

(ρίζες πραγματικές και διαφορετικές)

(β) $a = 1\ ,\ b = -4\ ,\ c = 4 \ \Rightarrow\ \Delta = b^2 - 4ac = 0 \ \Rightarrow\ \rho_1 = \rho_2 = \dfrac{-b}{2a} = 2$

(διπλή πραγματική ρίζα)

Εναλλακτικός τρόπος: Με απλή επισκόπηση προκύπτει ότι $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$ οπότε $x^2 - 4x + 4 = 0 \ \Leftrightarrow\ (x-2)^2 = 0 \ \Leftrightarrow\ \rho = 2$.

(γ) $a = 1\ ,\ b = 2\ ,\ c = 5 \ \Rightarrow\ \Delta = b^2 - 4ac = -16 < 0 \ \Rightarrow$

$\rho_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = -1 + 2i\ ,\ \rho_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -1 - 2i$

(ρίζες συζυγείς μιγαδικές)

Και για τα τρία παραδείγματα, είναι εύκολο να πιστοποιηθεί ότι ισχύουν οι σχέσεις $\rho_1 + \rho_2 = -\dfrac{b}{a}$,

$\rho_1 \cdot \rho_2 = \dfrac{c}{a}$.

7. Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 1ης και 2ης τάξης (βασικά στοιχεία)

7.1. Γενικά

Στις **διαφορικές** εξισώσεις, οι **άγνωστοι** είναι **συναρτήσεις**. Στις εξισώσεις αυτές εμφανίζονται οι άγνωστες συναρτήσεις και οι παράγωγοί τους (μέχρι κάποιας τάξης).

Γραμμικές λέγονται οι διαφορικές εξισώσεις στις οποίες η άγνωστη συνάρτηση και οι παράγωγοί της εμφανίζονται στην **πρώτη δύναμη**. Στις εξισώσεις **1ης τάξης** εμφανίζεται η άγνωστη συνάρτηση και η **1η** παράγωγός της ενώ στις εξισώσεις **2ης τάξης** εμφανίζεται η άγνωστη συνάρτηση και οι παράγωγοί της **1ης** και **2ης** τάξης. Γενικά, η **τάξη** μιας διαφορικής εξίσωσης καθορίζεται από την τάξη της **ανώτερης παραγώγου**.

Μια **γραμμική** διαφορική εξίσωση **1ης τάξης** έχει τη μορφή

$$\frac{dy}{dt} + P(t).y = Q(t) \qquad ή \qquad y' + P(t).y = Q(t)$$

ενώ μια **γραμμική** διαφορική εξίσωση **2ης τάξης** έχει τη μορφή

$$\frac{d^2y}{dt^2} + A(t)\frac{dy}{dt} + P(t).y = Q(t) \qquad ή \qquad y'' + A(t).y' + P(t).y = Q(t)$$

όπου **y(t)** η **άγνωστη** συνάρτηση και R(t), P(t), Q(t) γνωστές συναρτήσεις.

Αν **Q(t) = 0**, η διαφορική εξίσωση χαρακτηρίζεται ως **ομογενής** ενώ αν **Q(t) ≠ 0**, χαρακτηρίζεται ως **μη ομογενής**.

Η **γενική λύση** μιας διαφορικής εξίσωσης περιέχει 1 ή 2 **σταθερές**, ανάλογα με το αν διαφορική εξίσωση είναι 1ης ή 2ης τάξης. Οι σταθερές αυτές προκύπτουν από τις πράξεις ολοκλήρωσης και μπορούν να υπολογιστούν μόνο αν είναι γνωστές οι αρχικές συνθήκες (η τιμή της συνάρτησης ή/και των παραγώγων της τη χρονική στιγμή t = 0).

7.2. Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 1ης τάξης

Μια μέθοδος για την επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων 1ης τάξης είναι η μέθοδος των **χωριζόμενων μεταβλητών**. Κατά τη μέθοδο αυτή, η εξαρτημένη μεταβλητή (άγνωστη συνάρτηση y) εμφανίζεται (μετά από πράξεις) στο πρώτο (αριστερό) μέλος ενώ η ανεξάρτητη μεταβλητή t στο δεύτερο (δεξί) μέλος.

Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις 1ης τάξης

Η μέθοδος των **χωριζόμενων μεταβλητών** για **ομογενείς** γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 1ης τάξης εφαρμόζεται ως εξής:

$$\frac{dy}{dt} + P(t).y = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = -P(t).y$$

$$\frac{dy}{y} = -P(t).dt$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int P(t).dt$$

$$\ln y = -\int P(t).dt + K_1$$

$$y(t) = e^{-\int P(t).dt + K_1} = e^{K_1} e^{-\int P(t).dt} = Ke^{-\int P(t).dt}$$

όπου K_1 σταθερά και $K = e^{K_1}$ (μια νέα σταθερά).

Στην (αρκετά συνήθη) περίπτωση όπου **P(t) = p** (σταθερά) η επίλυση της **ομογενούς** εξίσωσης 1ης τάξης γίνεται ως εξής:

$$\frac{dy}{dt} + p.y = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = -p.y$$

$$\frac{dy}{y} = -p.dt$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p.dt = -pt + K_1$$

$$\ln y = -pt + K_1$$

$$y(t) = e^{-pt + K_1} = e^{K_1} e^{-pt} = Ke^{-pt}$$

Μη ομογενείς διαφορικές εξισώσεις $1^{ης}$ τάξης με σταθερούς συντελεστές (P(t) = p και Q(t) = q)

Η επίλυση μιας **μη ομογενούς** διαφορικής εξίσωσης $1^{ης}$ τάξης με σταθερούς συντελεστές (της μορφής $\frac{dy}{dt} + p.y = q$) γίνεται ως εξής:

- ✓ Αρχικά, επιλύεται (με τη μέθοδο των χωριζόμενων μεταβλητών) η ομογενής εξίσωση $\frac{dy}{dt} + p.y = 0$ από την οποία προκύπτει η λύση $y_h(t) = Ke^{-pt}$ (βλ. αμέσως προηγούμενη υποενότητα).
- ✓ Με βάση το παραπάνω αποτέλεσμα, για την επίλυση της αρχικής (μη ομογενούς) εξίσωσης, επιλέγεται μία λύση της μορφής $y(t) = u(t)e^{-pt}$ όπου u(t) συνάρτηση που θα υπολογιστεί κατά την επίλυση της εξίσωσης.

Πράγματι, εισάγοντας τη συνάρτηση $y(t) = u(t)e^{-pt}$ στην αρχική εξίσωση $\frac{dy}{dt} + p.y = q$, προκύπτει ότι

$$u'(t)e^{-pt} - pu(t)e^{-pt} + pu(t)e^{-pt} = q \quad \Rightarrow$$

$$u'(t)e^{-pt} = q \quad \Rightarrow$$

$$u'(t) = qe^{+pt} \quad \Rightarrow$$

$$u(t) = \int qe^{+pt} = \frac{q}{p}e^{+pt} + K$$

Άρα

$$y(t) = u(t)e^{-pt} = \frac{q}{p}e^{+pt}e^{-pt} + Ke^{-pt} \quad \Rightarrow$$

$$y(t) = Ke^{-pt} + \frac{q}{p}$$

Μη ομογενείς διαφορικές εξισώσεις 1ης τάξης (γενική περίπτωση)

Η εφαρμογή της παραπάνω διαδικασίας σε εξίσωση της μορφής

$$\frac{dy}{dt} + P(t).y = Q(t)$$

οδηγεί στη λύση

$$y(t) = e^{-\int P(t)dt}\left[\int\{Q(t)e^{-\int P(t)dt}\}dt + K\right]$$

Παραδείγματα

Να επιλυθούν οι παρακάτω γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 1ης τάξης (με σταθερούς συντελεστές):

(α) $\frac{dy}{dt} + 2t.y = 0$

(β) $\frac{dy}{dt} + 3.y = 0$

(γ) $\frac{dy}{dt} + 3.y = 6$

Για τη λύση κάθε εξίσωσης, να υπολογιστεί η σταθερά C αν y(0) = 3.

Λύση

(α) $\frac{dy}{dt} + 2t.y = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dt} = -2t.y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -2t.dt \Leftrightarrow \int\frac{dy}{y} = \int(-2t).dt + K_1 \Leftrightarrow \ln y = -t^2 + K_1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y(t) = e^{-t^2 + K_1} = e^{K_1}e^{-t^2} = Ke^{-t^2}$

$y(0) = K.e^0 = 3 \Rightarrow K = 3$

(β) Με παρόμοιο τρόπο (όπως παραπάνω) προκύπτει $y(t) = e^{-3t + K_1} = e^{K_1}e^{-pt} = Ke^{-3t}$

$y(0) = K.e^0 = 3 \Rightarrow K = 3$

(γ) Επιλέγεται λύση της μορφής $y(t) = u(t)e^{-3t}$ και εισάγεται στη διαφορική εξίσωση (την οποία πρέπει να ικανοποιεί). Προκύπτει $u(t) = 2e^{+3t} + K$ οπότε $y(t) = y(t) = Ke^{-3t} + 2$

$y(0) = K.e^0 +2 = 3 \Rightarrow K = 1$

7.3. Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές

Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις 2ης τάξης (με σταθερούς συντελεστές)

Για την επίλυση της (**ομογενούς**) εξίσωσης της μορφής **y'' + ay'+ py = 0**, ακολουθείται η εξής διαδικασία:

- ✓ Σχηματίζεται και επιλύεται η (δευτεροβάθμια) αλγεβρική εξίσωση $\lambda^2 + a\lambda + p = 0$. Η εξίσωση αυτή (που λέγεται **χαρακτηριστική εξίσωση**) έχει 2 λύσεις της μορφής

  $\lambda_1 = \dfrac{-a+\sqrt{\Delta}}{2}$, $\lambda_2 = \dfrac{-a-\sqrt{\Delta}}{2}$ όπου $\Delta = a^2 - 4p$ η διακρίνουσα της εξίσωσης.
- ✓ Η μορφή των λύσεων λ_1, λ_2 (πραγματικές διαφορετικές, πραγματικές ίσες, μιγαδικές) καθορίζει και τη λύση της διαφορικής εξίσωσης.
  - ♦ 1η περίπτωση ($\Delta > 0$ οπότε λ_1, λ_2 πραγματικές και διαφορετικές): $y(t) = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t}$
  - ♦ 2η περίπτωση ($\Delta = 0$ οπότε $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = \dfrac{-a}{2}$ πραγματικές): $y(t) = (K_1 + K_2 t)e^{\lambda t}$
  - ♦ 3η περίπτωση ($\Delta < 0$ οπότε λ_1, λ_2 μιγαδικές συζυγείς της μορφής $\lambda_1 = \sigma + j\omega$ και $\lambda_2 = \sigma - j\omega$)
    $y(t) = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t} = e^{\sigma t}\,[M_1\cos(\omega t) + M_2\sin(\omega t)]$

Παραδείγματα

Να επιλυθούν οι παρακάτω γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 2ης τάξης
(α) $y'' - 3y' + 2y = 0$
(β) $y'' - 4y' + 4y = 0$
(γ) $y'' + 4y' + 8y = 0$
Για τη λύση κάθε εξίσωσης, να υπολογιστούν οι σταθερές ολοκλήρωσης αν $y(0) = 0$ και $y'(0) = 1$.

Λύση
(α) $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2 \;\Rightarrow\; y(t) = K_1 e^{3t} + K_2 e^{2t}$
$y(0) = K_1 + K_2 = 0$
$y'(t) = 3K_1 e^{3t} + 2K_2 e^{2t} \;\Rightarrow\; y'(0) = 3K_1 + 2K_2 = 1$
Προκύπτει $C_1 = 1$, $C_2 = -1$
(β) $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = \lambda_2 = 2 \;\Rightarrow\; y(t) = (K_1 + K_2 t)e^{2t}$
$y(0) = K_1 = 0$
Άρα $y(t) = K_2 t e^{2t} \;\Rightarrow\; y'(t) = K_2 e^{2t} + 2K_2 t e^{2t} \;\Rightarrow\; y'(0) = K_2 = 1$
(γ) $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = -1 + 2i$, $\lambda_1 = -1 - 2i \;\Rightarrow$
$\Rightarrow\; y(t) = K_1 e^{(-1+2i)t} + K_1 e^{(-1-2i)t} = e^{(-1)t}[M_1\cos(2t) + M_2\sin(2t)]$
$y(0) = e^0[M_1\cos(0) + M_2\sin(0)] = D_1 = 0$
Άρα $y(t) = e^{-t} M_2\sin(2t) \;\Rightarrow\; y'(t) = -e^{-t} M_2\sin(2t) + e^{-t} M_2 2\cos(2t) \;\Rightarrow\; y'(0) = 2M_2 = 1$
$\Rightarrow\; M_2 = \dfrac{1}{2}$

Μη ομογενείς διαφορικές εξισώσεις 2ης τάξης (με σταθερούς συντελεστές)

Στην περίπτωση αυτή, επιλύεται η αντίστοιχη **ομογενής** εξίσωση (όπως αναλύθηκε παραπάνω) και στη λύση $\mathbf{y_{ομογ}(t)}$ (της ομογενούς) που προκύπτει προστίθεται μια οποιαδήποτε (**μερική**) λύση $\mathbf{y_{μερ,αρχ}(t)}$ της αρχικής εξίσωσης. Η λύση αυτή καθορίζεται από τη μορφή της Q(t) (του μη ομογενούς όρου). Για παράδειγμα, αν Q(t) = q (γνωστή σταθερά) και η λύση που θα προστεθεί είναι μια σταθερά (που θα υπολογιστεί στην πορεία).

$y(t) = y_{ομογ}(t) + y_{μερ,αρχ}(t)$

Παράδειγμα

Να επιλυθεί οι παρακάτω (μη ομογενής) γραμμική διαφορική εξίσωση 2ης τάξης

$y'' - 3y' + 2y = 6$

Λύση

Η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση $y'' - 3y' + 2 = 0$ έχει λύση (βλ. προηγούμενο παράδειγμα) $y_{ομογ}(t) = K_1 e^{3t} + K_2 e^{2t}$

Ως μερική λύση της αρχικής επιλέγεται μια συνάρτηση της μορφής $\mathbf{y_{μερ,αρχ}(t)} = q$. Εισάγοντας τη λύση $y_{μερ,αρχ}(t) = q$ στην αρχική εξίσωση, προκύπτει $2q = 6 \Rightarrow q = 3$. Άρα

$y(t) = y_{ομογ}(t) + y_{μερ,αρχ}(t) = K_1 e^{3t} + K_2 e^{2t} + 3$

8. Διανυσματική ανάλυση (βασικά στοιχεία) [17]

8.1. Βασικοί ορισμοί και άλγεβρα διανυσμάτων

Ορισμός διανύσματος

Ένα μέγεθος $\underline{V}$ χαρακτηρίζεται ως «**διανυσματικό**» όταν για τον καθορισμό του, εκτός από το μέτρο του αλλά πρέπει να προσδιορίζεται και η κατεύθυνσή του (διεύθυνση και φορά).

Παραδείγματα διανυσματικών μεγεθών είναι η ταχύτητα, η επιτάχυνση, η δύναμη, η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου κλπ.

Ένα διάνυσμα $\underline{V}$ αντιπροσωπεύεται από τις **συνιστώσες** του σε κάποιο σύστημα συντεταγμένων (καρτεσιανό, σφαιρικό κλπ.).

$\underline{V} = V_x\underline{\underline{\mathbf{x}}} + V_y\underline{\underline{\mathbf{y}}} + V_z\underline{\underline{\mathbf{z}}} = V_r\underline{\underline{\mathbf{r}}} + V_\theta\underline{\underline{\boldsymbol{\theta}}} + V_\varphi\underline{\underline{\boldsymbol{\varphi}}}$

ή

$\underline{V} = (V_x , V_y , V_z) = (V_r , V_\theta , V_\varphi)$

Η ανάλυση των διανυσμάτων σε συνιστώσες (V_x , V_y , V_z) ή (V_r , V_θ , V_φ) κλπ. διευκολύνει τις πράξεις και τους υπολογισμούς.

Το **μέτρο** $|V|$ του διανύσματος ορίζεται ως

$$|V| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \sqrt{V_r^2 + V_\theta^2 + V_\varphi^2}$$

Στερεά γωνία

Η **στερεά γωνία Ω** (σε stereorad ή srad) ορίζεται μέσω της σχέσης

$$\Omega = \frac{S}{r^2} \qquad \text{(σε srad)}$$

όπου S τμήμα σφαιρικής επιφάνειας ακτίνας r. Προφανώς, η μέγιστη τιμή της στερεάς γωνίας προκύπτει όταν διαγράφεται ολόκληρη η σφαιρική επιφάνεια και δεδομένου ότι αυτή ισούται με $S_{ολ} = 4\pi . r^2$, η μέγιστη στερεά γωνία ισούται με

[17] Στο κείμενο που ακολουθεί, οι **διανυσματικές** ποσότητες εμφανίζονται υπογραμμισμένες (π.χ. $\underline{r}$, $\underline{A}$, $\underline{P}_{av}$), το **μέτρο** των διανυσμάτων εμφανίζεται χωρίς υπογράμμιση (π.χ. r, A, P_{av}) ενώ τα **μοναδιαία** διανύσματα εμφανίζονται **έντονα** (bold) με διπλή υπογράμμιση (π.χ. $\underline{\underline{\mathbf{x}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{y}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{z}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{r}}}$, $\underline{\underline{\boldsymbol{\theta}}}$, $\underline{\underline{\boldsymbol{\varphi}}}$).

$$\Omega_{max} = \frac{S_{ολ}}{r^2} = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi$$

Η στοιχειώδης στερεά γωνία δίνεται από τη σχέση

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2} \quad \text{(σε srad)} \qquad \Leftrightarrow \qquad dS = r^2.d\Omega$$

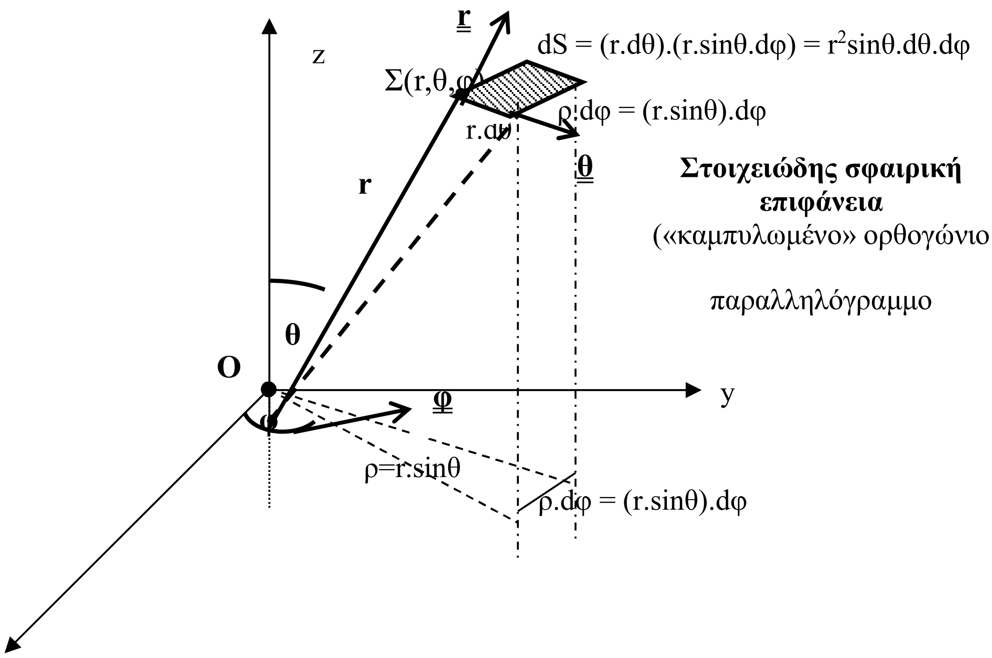
<u>Σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων</u>

Μολονότι το ευρύτερα χρησιμοποιούμενο σύστημα συντεταγμένων είναι το «**καρτεσιανό**» (συντεταγμένες **x**, **y**, **z** – μοναδιαία διανύσματα **<u>x</u>**, **<u>y</u>**, **<u>z</u>**), στην ανάλυση των κεραιών, χρησιμοποιείται (λόγω της γεωμετρίας των σχετικών προβλημάτων) το **σφαιρικό** σύστημα συντεταγμένων (έστω και αν η κεραία είναι γραμμική με κατεύθυνση συγκεκριμένο άξονα, π.χ. τον Oz)[18]. Το **σφαιρικό** σύστημα προβλέπει ως συντεταγμένες (για την περιγραφή του τυχαίου σημείου Σ) την απόσταση **r** από ένα κεντρικό σημείο O, τη γωνία **θ** ως προς την κατακόρυφο (Oz) και τη γωνία **φ**, της προβολής του Σ, ως προς τον άξονα Ox (βλ. και σχήμα αμέσως παρακάτω). Τα αντίστοιχα **μοναδιαία** διανύσματα είναι τα **<u>r</u>**, **<u>θ</u>**, **<u>φ</u>** τα οποία είναι **ορθογώνια** μεταξύ τους[19].

[18] Υπό την έννοια ότι οι τα διανύσματα του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου (E, H) εκφράζονται με τις σφαιρικές τους συνιστώσες (E_r, E_θ, E_φ, H_r, H_θ, H_φ).

[19] Η **ορθογωνιότητα** των μοναδιαίων διανυσμάτων είναι χαρακτηριστικό **όλων** των χρησιμοποιούμενων συστημάτων συντεταγμένων (καρτεσιανού, κυλινδρικού, σφαιρικού κλπ.), προκειμένου να διευκολύνονται οι πράξεις μεταξύ διανυσμάτων.

Η γεωμετρία του σφαιρικού συστήματος φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί:



Για τις τρεις συντεταγμένες (r, θ, φ) προβλέπονται τα παρακάτω διαστήματα τιμών:

$0 \le r < \infty$

$0 \le \theta \le \pi$ (από τον θετικό μέχρι τον αρνητικό ημιάξονα «z»)

$0 \le \varphi \le 2\pi$ (πλήρης περιστροφή στο οριζόντιο επίπεδο)

Ολοκλήρωση επί σφαιρικής επιφάνειας

Όταν μια συνάρτηση Ξ(r,θ,φ) ολοκληρώνεται επί σφαιρικής επιφάνειας, τότε ισχύει ότι

$dS = r^2 \sin\theta . d\theta . d\varphi$

Αν η διεργασία ολοκλήρωσης καλύπτει ολόκληρη την επιφάνεια της σφαίρας τότε

$0 \le \theta \le \pi$ και $0 \le \varphi \le 2\pi$

οπότε το αντίστοιχο ολοκλήρωμα λαμβάνει τη μορφή

$$\int \Xi(r,\theta,\varphi).dS = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \Xi(r,\theta,\varphi).r^2\sin\theta.d\theta.d\varphi$$

Όταν η συνάρτηση Ξ(r,θ,φ) είναι ανεξάρτητη της γωνίας φ (Ξ(r,θ,φ) ≡ Ξ(r,θ) – περίπτωση που απαντάται συχνά στις γραμμικές κεραίες) η ολοκλήρωση ως προς φ, επί της συνολικής επιφάνειας της σφαίρας, «παράγει» απλώς έναν συντελεστή ίσο με **2π**.

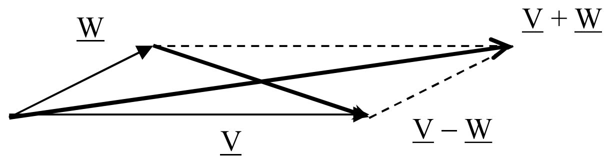
$$\int \Xi(r,\theta).dS = \int_0^{\pi}\int_0^{\mathbf{2\pi}} \Xi(r,\theta).r^2\sin\theta.d\theta.d\varphi = \int_0^{\mathbf{2\pi}} \left[\int_0^{\pi} \Xi(r,\theta).r^2\sin\theta.d\theta\right].d\varphi = \mathbf{2\pi}.\int_0^{\pi} \Xi(r,\theta).r^2\sin\theta.d\theta$$

Άθροισμα και διαφορά διανυσμάτων

Το **άθροισμα** και η **διαφορά** δύο διανυσμάτων $\underline{V}$ και $\underline{W}$ είναι τα **διανυσματικά** μεγέθη που ορίζονται ως

$$\underline{V} + \underline{W} = (V_x + W_x)\underline{\underline{\mathbf{x}}} + (V_y + W_y)\underline{\underline{\mathbf{y}}} + (V_z + W_z)\underline{\underline{\mathbf{z}}} = (V_r + W_r)\underline{\underline{\mathbf{r}}} + (V_\theta + W_\theta)\underline{\underline{\boldsymbol{\theta}}} + (V_\varphi + W_\varphi)\underline{\underline{\boldsymbol{\varphi}}}$$

$$\underline{V} - \underline{W} = (V_x - W_x)\underline{\underline{\mathbf{x}}} + (V_y - W_y)\underline{\underline{\mathbf{y}}} + (V_z - W_z)\underline{\underline{\mathbf{z}}} = (V_r - W_r)\underline{\underline{\mathbf{r}}} + (V_\theta - W_\theta)\underline{\underline{\boldsymbol{\theta}}} + (V_\varphi - W_\varphi)\underline{\underline{\boldsymbol{\varphi}}}$$

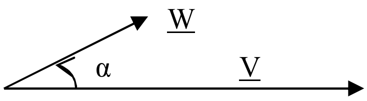


Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

Το **εσωτερικό γινόμενο** δύο διανυσμάτων $\underline{V}$ και $\underline{W}$ είναι το **βαθμωτό** μέγεθος που ορίζεται ως

$$\underline{V}\bullet\underline{W} = |V|.|W|.\cos\alpha$$

όπου $|V|$, $|W|$ τα μέτρα των δύο διανυσμάτων και “α” η μεταξύ τους γωνία.



Ιδιότητες

- $\underline{V} \perp \underline{W} \;\Leftrightarrow\; \underline{V}\bullet\underline{W} = \mathbf{0}$
  Απόδειξη: Αν $\alpha = 90^o \Rightarrow \cos\alpha = 0$ οπότε $\underline{V}\bullet\underline{W} = 0$.

- $\underline{W}\bullet\underline{V} = \underline{V}\bullet\underline{W}$
  Απόδειξη: $\underline{W}\bullet\underline{V} = |W|.|V|.\cos(-\alpha) = |V|.|W|.\cos\alpha = \underline{V}\bullet\underline{W}$

- $\underline{V}\bullet\underline{W} = V_xW_x + V_yW_y + V_zW_z = V_rW_r + V_\theta W_\theta + V_\varphi W_\varphi$
  Απόδειξη: $\underline{V}\bullet\underline{W} = (V_x\underline{\underline{\mathbf{x}}} + V_y\underline{\underline{\mathbf{y}}} + V_z\underline{\underline{\mathbf{z}}})\bullet(W_x\underline{\underline{\mathbf{x}}} + W_y\underline{\underline{\mathbf{y}}} + W_z\underline{\underline{\mathbf{z}}}) = V_xW_x\underline{\underline{\mathbf{x}}}\bullet\underline{\underline{\mathbf{x}}} + V_xW_y\underline{\underline{\mathbf{x}}}\bullet\underline{\underline{\mathbf{y}}} + \ldots$
  $= V_xW_x + V_yW_y + V_zW_z$
  (όπου χρησιμοποιείται η ορθογωνιότητα των μοναδιαίων διανυσμάτων – π.χ. $\underline{\underline{\mathbf{x}}}\bullet\underline{\underline{\mathbf{x}}} = 1$ $\underline{\underline{\mathbf{x}}}\bullet\underline{\underline{\mathbf{y}}} = 0$)
  Ομοίως και για το σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων.

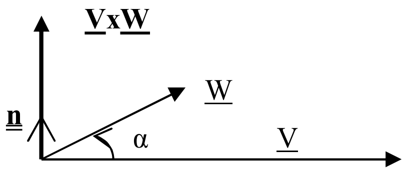
- $|V| = \sqrt{\underline{V}\bullet\underline{V}} = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \sqrt{V_r^2 + V_\theta^2 + V_\varphi^2}$
  Απόδειξη: $\underline{V}\bullet\underline{V} = V_xV_x + V_yV_y + V_zV_z = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 = |V|^2$
  Ομοίως και για το σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων.

Εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

Το **εξωτερικό γινόμενο** δύο διανυσμάτων $\underline{V}$ και $\underline{W}$ είναι το **διανυσματικό** μέγεθος που ορίζεται ως

$$\underline{V} \times \underline{W} = \underline{\underline{\mathbf{n}}}.|V|.|W|.\sin\alpha$$

όπου $\underline{\underline{\mathbf{n}}}$ το μοναδιαίο διάνυσμα προς την κατεύθυνση που είναι κάθετη και στα δύο διανύσματα, |V| και |W| τα μέτρα των δύο διανυσμάτων και “α” η μεταξύ τους γωνία (η οποία θεωρείται ότι έχει κατεύθυνση από το $\underline{V}$ προς το $\underline{W}$).



Μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$\underline{V} \times \underline{W} = \begin{vmatrix} \underline{\underline{\mathbf{x}}} & \underline{\underline{\mathbf{y}}} & \underline{\underline{\mathbf{z}}} \\ V_x & V_y & V_z \\ W_x & W_y & W_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{\underline{\mathbf{r}}} & \underline{\underline{\boldsymbol{\theta}}} & \underline{\underline{\boldsymbol{\varphi}}} \\ V_r & V_\theta & V_\varphi \\ W_r & W_\theta & W_\varphi \end{vmatrix}$$

Ιδιότητες

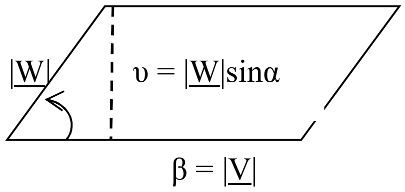
- $\underline{V} \,//\, \underline{W} \;\Leftrightarrow\; \underline{V} \times \underline{W} = 0$
  Απόδειξη: Επειδή $\underline{V} \,//\, \underline{W}$, είναι $\alpha = 0^o \Rightarrow \sin\alpha = 0$ οπότε $\underline{V} \times \underline{W} = 0$
  Πόρισμα: $\underline{V} \times \underline{V} = 0$

- $\underline{W} \times \underline{V} = -\underline{V} \times \underline{W}$
  Απόδειξη: $\underline{W} \times \underline{V} = \underline{\underline{\mathbf{n}}}|W|.|V|.\sin(-\alpha) = \underline{\underline{\mathbf{n}}}|V|.|W|.(-\sin\alpha) = -\underline{V} \times \underline{W}$

Φυσική σημασία του εξωτερικού γινομένου

Το $\underline{V} \times \underline{W}$ αντιπροσωπεύει το **εμβαδόν** του παραλληλογράμμου που έχει πλευρές τα διανύσματα $\underline{V}$ και $\underline{W}$. Επισημαίνεται ότι το εμβαδόν θεωρείται διανυσματικό μέγεθος με κατεύθυνση αυτή του κάθετου (στην επιφάνεια) διανύσματος (γεγονός που συνάδει με τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου).

Αξίζει να σημειωθεί ότι, στο γνωστό γεωμετρικό τύπο Ε = β.υ (για το εμβαδόν παραλληλογράμμου με βάση β και ύψος υ) το Ε δεν είναι τίποτε άλλο από το μέτρο του εξωτερικού γινομένου της μιας πλευράς επί την άλλη ($E = \beta.\upsilon = |\underline{V}|.|\underline{W}|\sin\alpha = |\underline{V}\times\underline{W}|$).



Τριπλό (ή μεικτό) γινόμενο διανυσμάτων

Το **τριπλό** (ή **μεικτό**) **γινόμενο** ορίζεται ως

$$\underline{U}\bullet(\underline{V}\times\underline{W}) = \begin{vmatrix} U_x & U_y & U_z \\ V_x & V_y & V_z \\ W_x & W_y & W_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U_r & U_\theta & U_\varphi \\ V_r & V_\theta & V_\varphi \\ W_r & W_\theta & W_\varphi \end{vmatrix}$$

Ιδιότητες

- $\underline{V}\bullet(\underline{V}\times\underline{W}) = (\underline{V}\times\underline{W})\bullet\underline{V} = 0$
  Απόδειξη: Το $\underline{V}\times\underline{W}$ είναι κάθετο στο $\underline{V}$, άρα το εσωτερικό τους γινόμενο είναι 0. Εναλλακτικά, η ιδιότητα μπορεί να προκύψει και από τον τύπο με την ορίζουσα (που θα έχει δύο ίδιες σειρές και συνεπώς θα μηδενίζεται)

- $\underline{U}\bullet(\underline{V}\times\underline{V}) = (\underline{V}\times\underline{V})\bullet\underline{U} = 0$
  Απόδειξη: Το $\underline{V}\times\underline{V}$ είναι 0 (ιδιότητα του εξωτερικού γινομένου) κάθετο στο $\underline{V}$. Εναλλακτικά, η ιδιότητα μπορεί να προκύψει και από τον τύπο με την ορίζουσα (που θα έχει δύο ίδιες σειρές και συνεπώς θα μηδενίζεται)

- $\underline{W}\times\underline{V} = -\underline{V}\times\underline{W}$
  Απόδειξη: $\underline{W}\times\underline{V} = \underline{\mathbf{n}}|W|.|V|.\sin(-\alpha) = \underline{\mathbf{n}}|V|.|W|.(-\sin\alpha) = -\underline{V}\times\underline{W}$

Φυσική σημασία του τριπλού γινομένου: Το μέτρο $|\underline{U}\bullet(\underline{V}\times\underline{W})|$ αντιπροσωπεύει τον όγκο του παραλληλεπιπέδου που σχηματίζεται από τα διανύσματα $\underline{U}$, $\underline{V}$ και $\underline{W}$.

9. Πιθανότητες (βασικά στοιχεία)

Διακριτές τυχαίες μεταβλητές

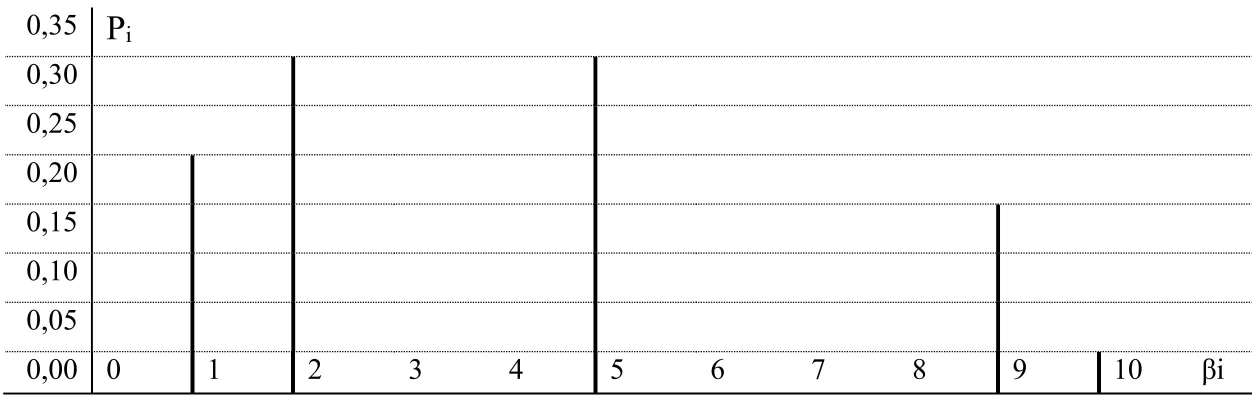
Η έννοια της **τυχαίας μεταβλητής** (εν προκειμένω της **διακριτής** τυχαίας μεταβλητής) μπορεί να γίνει κατανοητή με χρήση του παρακάτω παραδείγματος:

Έστω ότι μια τάξη σπουδαστών παρουσίασε τα παρακάτω αποτελέσματα, κατά την εξέταση ενός μαθήματος:

Βαθμός Χ (πιθανές τιμές β_i)	**Αριθμός** σπουδαστών με βαθμό β_i		**Ποσοστό** σπουδαστών με βαθμό β_i	**Πιθανότητα** λήψης βαθμού β_i $P(X=\beta_i) = P_i$
10	20		5%	0,05
9	20		15%	0,15
8	0		0%	0,00
7	0		0%	0,00
6	0		0%	0,00
5	60		30%	0,30
4	0		0%	0,00
3	0		0%	0,00
2	60		30%	0,30
1	40		20%	0,20
0	0		0%	0,00
ΣΥΝΟΛΟ	**200**		**100%**	**1,00**

Στον ανωτέρω πίνακα μπορούν να οριστούν:

- **Η τυχαία μεταβλητή Χ:** Είναι η μεταβλητή Χ που «αντιπροσωπεύει» τη βαθμολογία των σπουδαστών και η οποία λαμβάνει τιμές β_i από 1 έως 10, κάθε μία με το ποσοστό (ή, ισοδύναμα, την πιθανότητα P_i) που φαίνεται στον πίνακα.
- **Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f(X)**: Είναι η συνάρτηση f(X) της οποίας η **τιμή** $f(\beta_i)$ είναι (εξ ορισμού) η πιθανότητα $P_i \equiv P(X=\beta_i)$ κάποιος σπουδαστής να έχει βαθμό β_i (εναλλακτικά το ποσοστό των σπουδαστών που έχουν βαθμό β_i). Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(X) δίνεται στο **σχήμα** που ακολουθεί.



- **Η μέση (ή αναμενόμενη) τιμή μ (ή Ε(Χ) ή <Χ>)**: Είναι η μέση βαθμολογία της τάξης και προκύπτει ως εξής:

$$\mu = (10\bullet 20 + 9\bullet 20 + 0 + 0 + 5\bullet 60 + 0 + 0 + 2\bullet 60 + 1\bullet 40) / 200 =$$
$$= (20/200)\bullet 10 + (20/200)\bullet 9 + (60/200)\bullet 5 + (60/200)\bullet 2 + (40/200)\bullet 1 =$$
$$= (0{,}1)\bullet 10 + (0{,}1)\bullet 9 + (0{,}3)\bullet 5 + (0{,}3)\bullet 2 + (0{,}2)\bullet 1 =$$
$$\Rightarrow \quad \mu = \sum P_i.\beta_i = 4{,}20$$

- **Η τυπική απόκλιση σ**: Είναι η «μέση απόσταση» των ατομικών βαθμών από τη μέση βαθμολογία μ = 4,20 και ουσιαστικά προσδιορίζει το βαθμό «ομοιογένειας» της τάξης ως προς τις επιδόσεις της στο υπόψη μάθημα.

$$\sigma^2 = (0{,}1)\bullet(10-4{,}20)^2 + (0{,}1)\bullet(9-4{,}20)^2 + (0{,}3)\bullet(5-4{,}20)^2 + (0{,}3)\bullet(2-4{,}20)^2 + (0{,}2)\bullet(1-4{,}20)^2$$
$$\Rightarrow \sigma^2 = \sum P_i.(\beta_i-\mu)^2 = 9{,}36$$
$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{9{,}36} = 3{,}06$$

Γενικά ισχύει ότι

$$\mu \equiv E(X) \equiv \langle X \rangle = \sum P_i\beta_i$$

-

$$\sigma = \left\{\sum P_i.(\beta_i-\mu)^2\right\}^{1/2} = \left\{\langle (X-\mu)^2 \rangle\right\}^{1/2}$$

Επισημαίνεται ότι, πολλές φορές, αντί για την τυπική απόκλιση "σ", υπολογίζεται το τετράγωνό της "σ^2". Προφανώς

$$\sigma^2 = \sum P_i.(\beta_i-\mu)^2 = \langle (X-\mu)^2 \rangle$$

Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

Βασικοί ορισμοί

Μια συνεχής τυχαία μεταβλητή X λαμβάνει τιμές μέσα από διαστήματα της μορφής (a, b) (στις περιπτώσεις που ενδιαφέρουν, το διάστημα αυτό είναι, συνήθως, το **(−∞,∞)**). Επειδή τα διαστήματα αυτά είναι συνεχή, άρα περιλαμβάνουν άπειρο πλήθος τιμών, η πιθανότητα η X να λάβει μια συγκεκριμένη τιμή x είναι, προφανώς 0. Για το λόγο αυτόν, το ερώτημα «ποιά η πιθανότητα **P(X=x) ;**» είναι άνευ πρακτικής σημασίας, αντίθετα έχει νόημα το ερώτημα «ποιά η πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή X να λάβει τιμές από το απειροστό διάστημα (x, x+dx)**;**» δηλαδή «ποιά η τιμή της **P(x<X<x+dx);**».

Παράδειγμα: Ο θόρυβος **n(t)** (που εδώ αποτελεί μια συνεχή τυχαία μεταβλητή) μπορεί (θεωρητικά) να λάβει οποιαδήποτε τιμή στο διάστημα (-∞,∞). Η πιθανότητα ο θόρυβος να λάβει μια συγκεκριμένη τιμή (π.χ. 2 V) είναι 0. Ισχύει δηλαδή ότι **P(n(t)=2V) = 0**. Αντίθετα, υπάρχει κάποια πιθανότητα ο θόρυβος n(t) να λάβει τιμές από το στοιχειώδες διάστημα (2 V έως 2,00..1 V), οπότε πρέπει να υπολογιστεί η τιμή της **P(2 V < n(t) < 2,00..1 V)**

Για την πραγματοποίηση των παραπάνω υπολογισμών, ορίζεται η **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f(x)**, με βάση τις παρακάτω σχέσεις:

$$P(x < X < x+dx) = f(x).dx \Rightarrow \quad P(\alpha < X < \beta) = \int_{[\alpha,\beta]} f(x).dx$$

Προφανώς,

$$P(-\infty < X < \infty) = \int_{[-\infty,\infty]} f(x).dx = 1$$

Ως γραφική παράσταση, η εκάστοτε τιμή της **συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας** (π.χ. η τιμή **f(ρ)**) παρέχει μια ένδειξη σχετικά με το μέγεθος της πιθανότητας (σχετικά μεγάλη ή σχετικά μικρή) η τυχαία μεταβλητή X να λάβει τιμές γύρω από το απειροστό διάστημα γύρω από την τιμή **x=ρ**.

Μετά από τα παραπάνω, η **μέση τιμή μ** και η **τυπική απόκλιση σ** της (**συνεχούς**) τυχαίας μεταβλητής X ορίζονται ως εξής:

$$\mu \equiv E(X) \equiv \langle X \rangle = \int x.f(x).dx$$

$$\sigma = \sqrt{\int (x-\mu)^2 f(x)dx} = \sqrt{\langle (X-\mu)^2 \rangle}$$

Από την παραπάνω σχέση, προκύπτει ότι το τετράγωνο σ^2 της τυπικής απόκλισης (που πολλές φορές χρησιμοποιείται αντί για την ίδια την τυπική απόκλιση) δίνεται από τον τύπο

$$\sigma^2 = \int (x-\mu)^2 . f(x).dx = \langle (X-\mu)^2 \rangle$$

Σύγκριση των παραπάνω τύπων με τους αντίστοιχους για τις διακριτές τυχαίες μεταβλητές δείχνει ότι η ποσότητα $\mathbf{P_i}$ που εμφανίζεται για τις τελευταίες έχει «αντικατασταθεί» (όπως αναμενόταν) από την ποσότητα **f(x).dx**.

Αν η (συνεχής) τυχαία μεταβλητή X αντιπροσωπεύει τις εκάστοτε **τιμές m** ενός σήματος **m(t)**, τότε $f(x) \to f(m)$ οπότε

$$\mu \equiv E(m) \equiv \langle m(t) \rangle = \int m.f(m).dm$$

$$\sigma = \sqrt{\int (m-\mu)^2 f(m) dm} = \sqrt{\langle (m-\mu)^2 \rangle}$$

$$\sigma^2 = \int (m-\mu)^2 . f(m).dm = \langle (m-\mu)^2 \rangle$$

Σχόλια

- Για την μέση τιμή και την τυπική απόκλιση ενός σήματος m(t) μπορούν να χρησιμοποιηθούν και οι τύποι

  $$\langle m(t) \rangle \equiv \mu = \frac{1}{T} \int_T m(t).dt$$

  $$\sigma = \sqrt{\langle (m(t)-\mu)^2 \rangle} = \left[\frac{1}{T} \int_T \left(m(t)-\mu \right)^2 .dt \right]^{1/2}$$

  $$\sigma^2 = \langle \left(m(t)-\mu \right)^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_T \left(m(t)-\mu \right)^2 .dt$$

  Ωστόσο, επειδή οι παραπάνω τύποι προϋποθέτουν την ύπαρξη **ακριβούς** χρονικής **συνάρτησης m(t)** για το υπό μελέτη σήμα, μπορούν να εφαρμοστούν **μόνο** για **αιτιοκρατικά** σήματα. Αντίθετα για **στοχαστικά** σήματα (π.χ. για το θόρυβο) τα οποία, από τη φύση τους, δεν έχουν επακριβώς προσδιορισμένη κυματομορφή και ουσιαστικά προσδιορίζονται από τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f(m), χρησιμοποιούνται οι σχέσεις που εμπλέκουν την πυκνότητα πιθανότητας **f(m)**.
- Σε κάθε περίπτωση, για ένα **αιτιοκρατικό** σήμα **m(t)**, οι ποσότητες **f(m).dm** και $\frac{dt}{T}$ εκφράζουν (και οι δύο) την πιθανότητα, το σήμα m(t) να έχει τιμή από m(t) = m έως m(t+dt) = m+dm.

Κατανομές πιθανότητας – η κανονική κατανομή

Συνήθως, για μια τυχαία μεταβλητή, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f(x) είναι γνωστή, οπότε λέγεται ότι είναι γνωστή η **κατανομή πιθανότητας** της υπόψη μεταβλητής στο διάστημα τιμών της (εδώ το $(-\infty, \infty)$).

Σε πολλές από τις τηλεπικοινωνιακές εφαρμογές, οι τυχαίες μεταβλητές ακολουθούν την **κανονική κατανομή** πιθανότητας (ή **κατανομή Gauss**). Η κατανομή αυτή έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = \frac{1}{q\sqrt{2\pi}}.e^{-(x-r)^2/2q^2}$$

όπου r, q γνωστές παράμετροι.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι:

$$\mu = \int x.f(x).dx = r$$

$$\sigma^2 = \int (x-\mu)^2.f(x).dx = q^2$$

Δηλαδή, οι (γνωστές) παράμετροι **r** και **q** παρέχουν (απευθείας) τη μέση τιμή **μ** και την τυπική απόκλιση **σ** της **κανονικής** κατανομής. Για το λόγο αυτόν, η f(x) για την κανονική κατανομή γράφεται στη μορφή

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

από την οποία προκύπτουν απευθείας, τόσο η μέση τιμή **μ** όσο και η τυπική απόκλιση **σ**.

Από τη μελέτη της f(x) (βλέπε και γραφική παράσταση) προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

- Η f(x) μεγιστοποιείται για **x=μ**. Η μέγιστη τιμή είναι

$$f_{max} = f(\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

- Σε απόσταση **σ** από τη μέση τιμή ισχύει ότι:

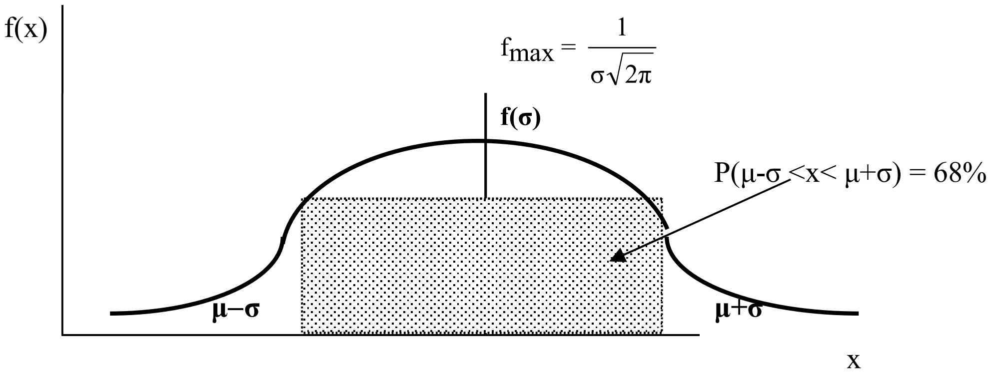
$$f(\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.e^{-1/2} = f_{max}\, e^{-1/2}$$

- Με χρήση πινάκων ολοκλήρωσης, προκύπτει ότι

$$P(\mu-\sigma < x < \mu+\sigma) = 68\%$$

$$P(\mu-2\sigma < x < \mu+2\sigma) = 97\%$$

$$P(\mu-3\sigma < x < \mu+3\sigma) = 99\%$$



Ο θόρυβος ως παράδειγμα τυχαίας μεταβλητής με κανονική κατανομή

Ο θόρυβος **n(t)** είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή **μ=0** και τυπική απόκλιση **σ** για την οποία (λόγω του ότι μ=0) ισχύει ότι:

$$\sigma^2 = \langle n^2(t) \rangle = P$$

όπου **P** η **μέση ισχύς** του θορύβου.

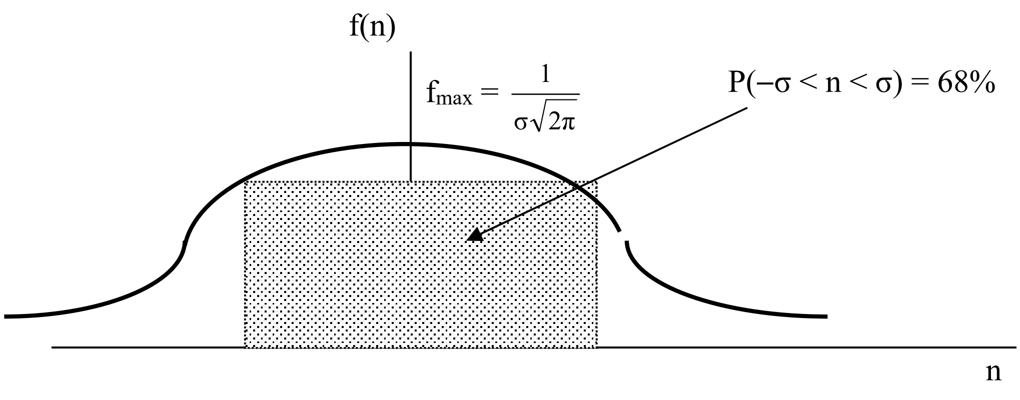
Θέτοντας μ = 0, στη σχέση $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} . e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$, προκύπτει ότι:

$$f(n) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} . e^{-n^2/2\sigma^2}$$

$$P(-\sigma < n < \sigma) = 68\%$$

$$P(-2\sigma < n < 2\sigma) = 97\%$$

$$P(-3\sigma < n < 3\sigma) = 99\%$$



ΠΑΡΑΠΟΜΠΕΣ

Άλγεβρα Α' Λυκείου, 2011: Ενότητες 3.3.

Άλγεβρα Β' Λυκείου, 2012: Ενότητες 3.1–3.2, 5.2

Μαθηματικά (Θετικής & Τεχνολογικής Κατεύθυνσης) Γ' Λυκείου, 2013: Ενότητες 2.1–2.4 (Α' μέρους), 2.1–2.3 (Β' μέρους), 3.1–3.2 (Β' μέρους).

Spiegel M.R., *Ανώτερα Μαθηματικά* (κεφ. 4, 5, 7), 1982