3. ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΩΜΙΚΩΝ ΚΥΚΛΩΜΑΤΩΝ[1]

3.1. Μέθοδος Απλών Βρόχων (Μ.Α.Β.)

3.1.1. Γενικά σχόλια

Στη μέθοδο των απλών βρόχων, οι **άγνωστοι** είναι τα **ρεύματα** των **απλών βρόχων**. Πρόκειται για **εικονικά** ρεύματα των οποίων η φορά καθορίζεται (αυθαίρετα) από πριν. Η επιλογή της φοράς των ρευμάτων βρόχου δεν έχει καμία επίδραση στην ορθότητα των τελικών αποτελεσμάτων.

Ως **απλοί** χαρακτηρίζονται οι βρόχοι (κλειστές διαδρομές) που δεν περιέχουν κλάδο. Μπορεί να αποδειχθεί ότι οι απλοί βρόχοι παρέχουν ένα σύστημα ανεξάρτητων εξισώσεων με μοναδική λύση τα (εικονικά) ρεύματα των βρόχων (από τα οποία θα προέλθουν τα ρεύματα και οι τάσεις των αντιστάσεων).

Κατά την εφαρμογή της μεθόδου των απλών βρόχων, το **σύστημα εξισώσεων** που προκύπτει έχει τη μορφή

$$\mathbf{[R]\cdot[i] = [\Sigma v]} \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12}\ldots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22}\ldots & R_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ R_{n1} & R_{n2\ldots} & R_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \ldots \\ i_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Sigma v_1 \\ \Sigma v_2 \\ \ldots \\ \Sigma v_3 \end{vmatrix}$$

όπου

- [R] είναι ο πίνακας των αντιστάσεων (με τόσες γραμμές και στήλες όσοι και οι απλοί βρόχοι του κυκλώματος).
- [i] είναι η στήλη με τα (άγνωστα) ρεύματα των βρόχων (i_1, i_2, i_3, …).
- [Σv] είναι η στήλη των τάσεων. Κάθε στοιχείο περιέχει το (αλγεβρικό) άθροισμα των τάσεων του αντίστοιχου βρόχου.

Στον **πίνακα** των **αντιστάσεων**:

- Τα **διαγώνια** στοιχεία $\mathbf{R_{ii}}$ (R_{11}, R_{22}, …) εκφράζουν το άθροισμα των αντιστάσεων του αντίστοιχου βρόχου και είναι θετικά ($R_{ii} > 0$).
- Τα (**μη** διαγώνια) στοιχεία $\mathbf{R_{ij}}$ εκφράζουν το άθροισμα των κοινών αντιστάσεων στους βρόχους “i” και “j” (για παράδειγμα, το στοιχείο R_{12} εκφράζει το άθροισμα των κοινών

[1] Η διαδικασία επίλυσης των γραμμικών **ωμικών** κυκλωμάτων, ανεξάρτητα από τη μέθοδο που θα χρησιμοποιηθεί οδηγεί σε ένα σύστημα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων στο οποίο οι άγνωστοι (τάσεις ή ρεύματα) υπολογίζονται είτε με τη μέθοδο των οριζουσών είτε με τη μέθοδο της αντικατάστασης. Αντίθετα, τα κυκλώματα που περιέχουν **πηνία** ή/και **πυκνωτές** (στοιχεία στα οποία η τάση και το ρεύμα συσχετίζονται μέσω διαφορικών/ολοκληρωτικών σχέσεων) οδηγούν σε συστήματα διαφορικών εξισώσεων των οποίων η λύση δεν είναι πάντα εύκολη.

αντιστάσεων στους βρόχους 1 και 2). Κάθε αντίσταση λαμβάνεται με πρόσημο "+" ή "–" ανάλογα με το αν διαρρέεται από ομόρροπα ή αντίρροπα ρεύματα. Επισημαίνεται ότι όταν η θετική φορά στα ρεύματα βρόχων είναι η ίδια (τα ρεύματα βρόχων είναι ομόστροφα), τα πρόσημα είναι αρνητικά ("–") οπότε $R_{ij} < 0$.

- Ο πίνακας **[R]** είναι **συμμετρικός** ($R_{ij} = R_{ji}$).

Στην **στήλη** των **τάσεων**, οι πηγές που, αν ήταν μόνες τους, θα δημιουργούσαν ρεύμα ομόρροπο με αυτό του βρόχου θεωρούνται θετικές (πρόσημο "+") ενώ αυτές που θα δημιουργούσαν αντίρροπο ρεύμα θεωρούνται αρνητικές (πρόσημο "–").

3.1.2. Επίλυση του συστήματος – υπολογισμοί

Η **επίλυση** του συστήματος $[R]\cdot[i] = [\Sigma v]$ παρέχει τα **ρεύματα** των **βρόχων** (i_1, i_2, i_3, …). Αν κάποιο ρεύμα βρόχου προκύψει θετικό, αυτό σημαίνει ότι η φορά του ρεύματος (που είχε επιλεγεί αυθαίρετα) είναι η ορθή ενώ, αν προκύψει αρνητικό, αυτό σημαίνει ότι θα έπρεπε να είχε επιλεγεί η αντίθετη φορά. Επισημαίνεται ότι η αρχική (και αυθαίρετη) επιλογή της φοράς δεν επηρεάζει τα τελικά αποτελέσματα.

Τα **ρεύματα** των **αντιστάσεων** θα προκύψουν από τα ρεύματα των βρόχων. Αν μία αντίσταση διαρρέεται από αντίρροπα ρεύματα βρόχων, τα ρεύματα αυτά αφαιρούνται. Το τελικό πρόσημο του ρεύματος μιας αντίστασης εξαρτάται από τη φορά των τάσεων που βλέπει η αντίσταση.

Η **τάση** v_R σε μια **αντίσταση** R προκύπτει από το νόμο του Ohm ($v_R = R.i_R$).

Η **ισχύς** P_R που καταναλώνεται σε μία **αντίσταση** R προκύπτει από τον τύπο $P_R = v_R.i_R = R.i_R^2$.

Η **ισχύς** P_S που παράγεται από μια **πηγή** δίνεται από τον τύπο $P_S = v_S.i_S$ όπου v_S η τάση της πηγής και i_S το ρεύμα στον κλάδο της πηγής.

Οι τάσεις και τα ρεύματα των αντιστάσεων θα πρέπει να ικανοποιούν το Νόμο Τάσεων Kirchhoff (Ν.Τ.Κ.) στους βρόχους και το Νόμο Ρευμάτων Kirchhoff (Ν.Ρ.Κ.) στους κόμβους.

Η παρεχόμενη στο κύκλωμα ισχύς είναι το άθροισμα των ισχύων που παράγονται από τις πηγές. Με τη σειρά της, η καταναλισκόμενη ισχύς είναι το άθροισμα των ισχύων που είτε απορροφώνται από τις πηγές είτε καταναλώνονται από τις αντιστάσεις

Η παρεχόμενη και η καταναλισκόμενη ισχύς είναι πάντα ίσες. Δηλαδή

$$P_{\pi\alpha\rho\varepsilon\chi} = P_{\kappa\alpha\tau\alpha\nu\alpha\lambda} \quad \Rightarrow \quad \Sigma P_{\pi\alpha\rho\alpha\gamma} = \Sigma P_{\alpha\pi o\rho\rho o\varphi} + \Sigma P_R$$

Τα **βήματα** για την εφαρμογή της μεθόδου των απλών βρόχων μπορούν να συνοψιστούν ως εξής:

- Κατάστρωση του συστήματος [R]•[i] = [Σv]
- Επίλυση του συστήματος ώστε να υπολογιστούν τα ρεύματα των βρόχων (i_1, i_2, i_3, …).
- Υπολογισμός των ρευμάτων και των τάσεων των αντιστάσεων.
- Υπολογισμός της ισχύος σε κάθε αντίσταση και για κάθε πηγή.
- Έλεγχος των αποτελεσμάτων (π.χ. μέσω της εφαρμογής των N.T.K. και N.P.K. ή/και της σχέσης $\Sigma P_S = \Sigma P_R$).

Σχόλιο: Η επίλυση του συστήματος [R]•[i] = [Σv] μπορεί να γίνει είτε με χρήση οριζουσών (μέθοδος Cramer) είτε με τη μέθοδο της αντικατάστασης. Η τελευταία προτιμάται όταν οι εξισώσεις είναι περισσότερες από 3 (π.χ. όταν υπάρχουν εξαρτημένες πηγές) ή όταν οι συντελεστές είναι τέτοιοι που να διευκολύνονται οι σχετικές πράξεις.

3.1.3. Υποπεριπτώσεις εφαρμογής της μεθόδου των απλών βρόχων

Όταν οι πηγές του κυκλώματος είναι **ανεξάρτητες πηγές τάσης**, εφαρμόζεται αυτούσια η ανωτέρω διαδικασία.

Όταν στο κύκλωμα υπάρχει **πηγή ρεύματος** (ανεξάρτητη ή εξαρτημένη) η οποία είναι **παράλληλη με αντίσταση** μετατρέπεται σε πηγή τάσης (και στη συνέχεια, εφαρμόζεται αυτούσια η ανωτέρω διαδικασία).

Όταν στο κύκλωμα υπάρχει **πηγή ρεύματος** (ανεξάρτητη ή εξαρτημένη) η οποία **δεν** μπορεί να μετατραπεί εύκολα σε πηγή τάσης (δηλαδή δεν έχει παράλληλη αντίσταση) τότε αντικαθίσταται από μια άγνωστη πηγή τάσης. Δεδομένου ότι το πρόβλημα αποκτά έναν επιπλέον άγνωστο, απαιτείται μία ακόμη εξίσωση η οποία θα προκύψει από τη συσχέτιση της αρχικής πηγής ρεύματος με τα ρεύματα των βρόχων.

3.1.4. Παραδείγματα – Ασκήσεις

Παράδειγμα: Εφαρμογή μεθόδου **απλών βρόχων**[2]

Στο κύκλωμα του σχήματος:

α) Να υπολογιστούν τα ρεύματα των κλάδων.

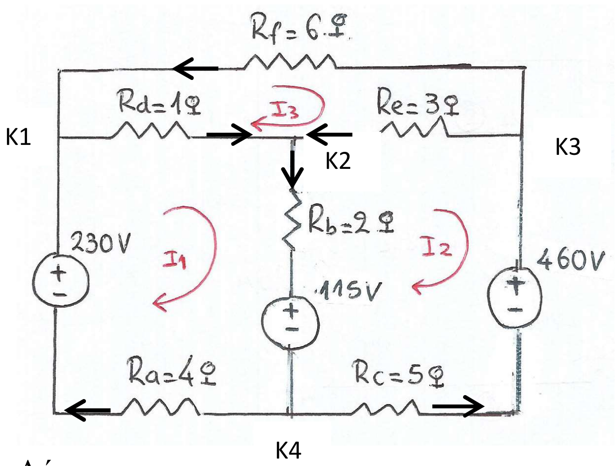
β) Να υπολογιστούν οι τάσεις των κλάδων.

γ) Να υπολογιστεί η συνολική παρεχόμενη ισχύς.

δ) Να υπολογιστεί η συνολική καταναλισκόμενη ισχύς (και να επαληθευτεί ότι είναι ίση με τη συνολική παρεχόμενη ισχύ).

ε) Να επαληθευτεί ο νόμος ρευμάτων Kirchhoff στους κόμβους του κυκλώματος.

στ) Να επαληθευτεί ο νόμος τάσεων Kirchhoff στους απλούς βρόχους του κυκλώματος.



Λύση

Ρεύματα βρόχων

$$\begin{vmatrix} 4+1+2 & -2 & -1 \\ -2 & 5+2+3 & -3 \\ -1 & -3 & 6+3+1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 230-115 \\ 115-460 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} 7i_1 - 2i_2 - 1i_3 &= 115 \\ -2i_1 + 10i_2 - 3i_3 &= -345 \\ -1i_1 - 3i_2 + 10i_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$i_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad , \quad i_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad , \quad i_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & -2 & -1 \\ -2 & 10 & -3 \\ -1 & -3 & 10 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 10 & -3 \\ -3 & 10 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 10 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} -2 & 10 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 7\bullet[10\bullet10 - (-3)(-3)] - (-2)\bullet[(-2)(10) - (-3)(-1)] + (-1)\bullet[(-2)(-3) - 10(-1)]$$

$$= 575$$

[2] Βλ. και Χατζαράκης Γ.Ε., *Ηλεκτρικά Κυκλώματα* (ενότητα 3.3, εδάφιο α1).

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 115 & -2 & -1 \\ -345 & 10 & -3 \\ 0 & -3 & 10 \end{vmatrix} = \ldots = 2530$$

-

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & 115 & -1 \\ -2 & -345 & -3 \\ -1 & 0 & 10 \end{vmatrix} = \ldots = -21160$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 7 & -2 & 115 \\ -2 & 10 & -345 \\ -1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \ldots = -6095$$

$i_1 = 4{,}4$ A , $i_2 = -36{,}8$ A , $i_3 = -10{,}6$ A

Σχόλιο (για το πρόσημο των ρευμάτων βρόχου): Το ότι τα ρεύματα i_2 και i_3 προέκυψαν **αρνητικά** σημαίνει ότι η φορά τους είναι **αντίθετη** από αυτήν που ορίστηκε αρχικά.

α) Ρεύματα κλάδων

$i_a = i_1 = 4{,}4$ A ($\leftarrow$)

$i_b = i_1 - i_2 = 4{,}4 - (-36{,}8) = 41{,}2$ A ($\downarrow$)

$i_c = -i_2 = 36{,}8$ A ($\rightarrow$)

$i_d = i_1 - i_3 = 4{,}4 - (-10{,}6) = 15$ A ($\rightarrow$)

$i_e = i_3 - i_2 = -10{,}6 - (-36{,}8) = 26{,}2$ A ($\leftarrow$)

$i_f = -i_3 = 10{,}6$ A ($\leftarrow$)

Σχόλιο (για το πρόσημο των ρευμάτων κλάδων): Ο υπολογισμός του i_b μπορεί να γίνει είτε «αλγεβρικά» όπως παραπάνω ($i_b = i_1 - i_2 = 41{,}2$ A) είτε θεωρώντας ότι η φορά του i_2 (που είχε προκύψει αρνητικό) **αντιστρέφεται** (οπότε το ρεύμα βρόχου γίνεται $i_2' = -i_2 = +36{,}8$ A) και $i_b = i_1 + i_2' = 4{,}4 + 36{,}8) = 41{,}2$ A. Ανάλογα σχόλια μπορούν να γίνουν για τα i_d και i_e.

Η διαπίστωση αντιστροφής της φοράς μπορεί να βοηθήσει στον υπολογισμό των i_c και i_f. Για τα ρεύματα αυτά, θεωρούμε τα αντεστραμμένα ρεύματα βρόχου $i_2' = -i_2 = +36{,}8$ A και $i_3' = -i_3 = +10{,}6$ A οπότε $i_c = i_2' = 36{,}8$ A και $i_f = i_3' = 10{,}6$ A (με φορά αντίστροφη από αυτήν των αρχικών ρευμάτων βρόχων i_2 και i_3).

Σε κάθε περίπτωση, συστήνεται τα ρεύματα κλάδων να δίνονται **χωρίς πρόσημο** (κατ' **απόλυτη τιμή**) με τη σωστή **φορά** να φαίνεται στο **κύκλωμα** και να δηλώνεται με **φράσεις** όπως «προς τα δεξιά», «προς τα αριστερά», «προς τα πάνω», «προς τα κάτω». Η ορθότητα της φοράς μπορεί να **ελεγχθεί** μέσω της εφαρμογής του **νόμου** των **ρευμάτων** του Kirchhoff (σε κάθε κόμβο το άθροισμα των εισερχομένων ρευμάτων πρέπει να ισούται με το άθροισμα των εξερχομένων).

β) Τάσεις κλάδων

$v_a = i_a R_a = 4{,}4 \bullet 4 = 17{,}6$ V (– , +)

$v_b = i_b R_b = 41{,}2 \bullet 2 = 82{,}4$ V (+ επάνω , – κάτω)

$v_c = i_c R_c = 36{,}8 \bullet 5 = 184$ V (+ , –)

$v_d = i_d R_d = 15 \bullet 1 = 15$ V (+ , –)

$v_e = i_e R_e = 26{,}2 \bullet 3 = 78{,}6$ V (– , +)

$v_f = i_f R_f = 10{,}6 \bullet 6 = 63{,}6$ V (– , +)

Στις τάσεις των κλάδων, το **υψηλότερο** δυναμικό («+») εμφανίζεται στο **άκρο εισόδου** του ρεύματος στον αντιστάτη και το **χαμηλότερο** («–») στο **άκρο εξόδου**.

γ) Συνολική παρεχόμενη ισχύς

$P_{παρεχ} = P_{(230V)} + P_{(460V)} = 230 \bullet 4{,}4 + 460 \bullet 36{,}8 = 17940 \text{ W} = 17{,}94 \text{ kW}$

Σχόλιο: Οι πηγές των 230V και 460V θεωρούνται ότι παράγει ισχύ επειδή τα ρεύματα i_a και i_c (αντίστοιχα) φαίνονται να εξέρχονται από το θετικό τους πόλο.

δ) Συνολική καταναλισκόμενη ισχύς

$P_{καταν} = P_{(115V)} + \sum P_R$

$P_{(115V)} = 115 \bullet 41{,}2 = 4738$ W

$\sum P_R = i_a R_a^2 + i_b R_b^2 + i_c R_c^2 + i_d R_d^2 + i_e R_e^2 + i_f R_f^2 = 13202$ W

$P_{καταν} = 4738 + 13202 = 17940 \text{ W} = 17{,}94 \text{ kW} = P_{παρεχ}$

Σχόλιο: Η πηγή των 115V θεωρείται ότι καταναλώνει (και δεν παράγει) ισχύ επειδή το ρεύμα i_b φαίνεται να **εισέρχεται** στο **θετικό** της πόλο.

ε) Νόμος ρευμάτων Kirchhoff στους κόμβους του κυκλώματος (διαπίστωση ότι ισχύει)

Κόμβος 1 (Κ1): $i_a + i_f = i_d$

Κόμβος 2 (Κ2): $i_d + i_e = i_b$

Κόμβος 3 (Κ3): $i_c = i_e + i_f$

Κόμβος 4 (Κ4): $i_b = i_a + i_c$

στ) Νόμος τάσεων Kirchhoff στους απλούς βρόχους του κυκλώματος (διαπίστωση ότι ισχύει)

Βρόχος 1: $230 - 115 = i_a R_a + i_d R_d + i_b R_b$

Βρόχος 2: $115 - 460 = -i_b R_b - i_c R_c - i_e R_e$

Βρόχος 3: $0 = i_d R_d - i_e R_e + i_f R_f$

Άσκηση: Εφαρμογή μεθόδου **απλών βρόχων**

Να επιλυθεί το κύκλωμα του προηγούμενου παραδείγματος, αν $R_a = R_c = R_d = R_e = 1\Omega$, $R_b = R_f = 2\Omega$ και οι πηγές (από αριστερά προς τα δεξιά έχουν τάσεις 4V, 2V και 4V).

Λύση (περίγραμμα)

Ρεύματα βρόχων

$$\begin{vmatrix} 1+2+1 & -2 & -1 \\ -2 & 2+1+1 & -1 \\ -1 & -1 & 1+1+2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-2 \\ 2-4 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$4i_1 - 2i_2 - 1i_3 = 2$$
$$-2i_1 + 4i_2 - 1i_3 = -2$$
$$-1i_1 - 1i_2 + 4i_3 = 0$$
$$i_1 = \frac{1}{3}A \quad , \quad i_2 = -\frac{1}{3}A \quad , \quad i_3 = 0\ A$$

α) Ρεύματα κλάδων

$$i_a = i_1 = \frac{1}{3}A\ (\leftarrow)$$

$$i_b = i_1 - i_2 = \frac{1}{3} - (-\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}\ A\ (\downarrow)$$

$$i_c = -i_2 = \frac{1}{3}A\ (\rightarrow)$$

$$i_d = i_1 - i_3 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}\ A\ (\rightarrow)$$

$$i_e = i_3 - i_2 = 0 - (-\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}\ A\ (\leftarrow)$$

$$i_f = 0\ A$$

β) Τάσεις κλάδων

$$v_a = i_a R_a = \frac{1}{3}V\ (-\ ,\ +)$$

$$v_b = i_b R_b = \frac{2}{3}V\ (+\ \text{επάνω}\ ,\ -\ \text{κάτω})$$

$$v_c = i_c R_c = \frac{1}{3}\ V\ (+\ ,\ -)$$

$$v_d = i_d R_d = \frac{1}{3}V\ (+\ ,\ -)$$

$$v_e = i_e R_e = = \frac{1}{3}V\ (-\ ,\ +)$$

$$v_f = i_f R_f = 0\ V$$

Παράδειγμα: Εφαρμογή μεθόδου **απλών βρόχων** σε κύκλωμα με **ανεξάρτητη** πηγή **ρεύματος**[3]

Στο κύκλωμα του σχήματος:

α) Να υπολογιστούν τα ρεύματα των κλάδων.

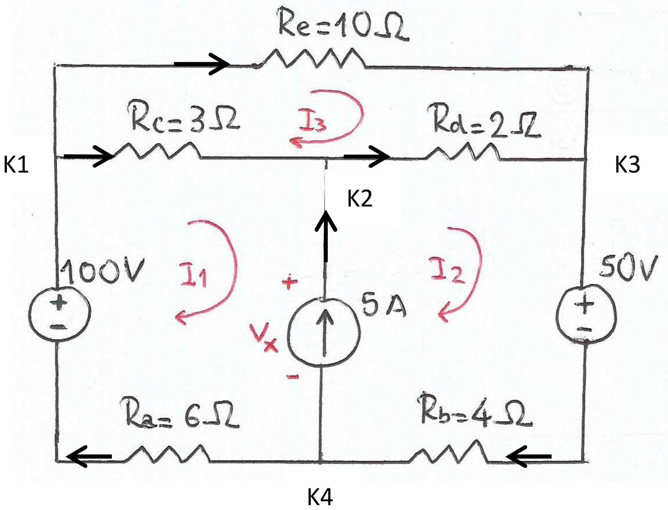
β) Να υπολογιστούν οι τάσεις των κλάδων.

γ) Να υπολογιστεί η συνολική παρεχόμενη ισχύς.

δ) Να υπολογιστεί η συνολική καταναλισκόμενη ισχύς (και να επαληθευτεί ότι είναι ίση με τη συνολική παρεχόμενη ισχύ).

ε) Να επαληθευτεί ο νόμος ρευμάτων Kirchhoff στους κόμβους του κυκλώματος.

στ) Να επαληθευτεί ο νόμος τάσεων Kirchhoff στους απλούς βρόχους του κυκλώματος.



Λύση

Η πηγή ρεύματος (5Α) αντικαθίσταται από μία πηγή τάσης η οποία είναι άγνωστη και συμβολίζεται ως v_X. Το σύστημα των εξισώσεων, σε μορφή πίνακα, είναι το εξής:

$$\begin{vmatrix} 6+3 & 0 & -3 \\ 0 & 4+2 & -2 \\ -3 & -2 & 10+3+2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 100-v_X \\ v_X-50 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} 9i_1 + 0i_2 - 3i_3 &= 100 - v_X \\ 0i_1 + 6i_2 - 2i_3 &= v_X - 50 \\ -3i_1 - 2i_2 + 15i_3 &= 0 \end{aligned}$$

Η v_X είναι ένας επιπλέον άγνωστος οπότε, για την επίλυση του συστήματος, απαιτείται μία ακόμη εξίσωση η οποία θα προκύψει από τη θεώρηση της πηγής ρεύματος. Πράγματι ισχύει ότι $5A = i_2 - i_1$.

Από την επίλυση του συστήματος (με τη μέθοδο της αντικατάστασης) προκύπτει ότι

$i_1 = 1{,}75$ A , $i_2 = 6{,}75$ A , $i_3 = 1{,}25$ A ([4])

[3] Βλ. και Χατζαράκης Γ.Ε., *Ηλεκτρικά Κυκλώματα* (ενότητα 3.3, εδάφιο α2).

[4] Για παράδειγμα, μπορεί να τεθεί $i_1 = i_2 - 5$ και το σύστημα να λυθεί με αγνώστους i_2, i_3 και v_X.

α) Ρεύματα κλάδων

$i_a = i_1 = 1{,}75$ A

$i_b = i_2 = 6{,}75$ A

$i_c = i_1 - i_3 = 0{,}5$ A

$i_d = i_2 - i_3 = 5{,}5$ A

$i_e = i_3 = 1{,}25$ A

Η άγνωστη τάση v_x μπορεί να προκύψει με επίλυση της 1ης ή της 2ης εξίσωσης ($v_x = 8{,}8$ V)

γ) Συνολική παρεχόμενη ισχύς

$P_{\pi\alpha\rho\varepsilon\chi} = P_{(100V)} + P_{(5A)} = 100 \bullet i_a + 5 \bullet v_x = 100 \bullet 1{,}75 + 5 \bullet 8{,}8 = 615$ W

δ) Συνολική καταναλισκόμενη ισχύς

$P_{\kappa\alpha\tau\alpha\nu} = P_{(50V)} + \sum P_R$

$P_{(50V)} = 50 \bullet i_b = 337{,}5$ W

$\sum P_R = i_a R_a^2 + i_b R_b^2 + i_c R_c^2 + i_d R_d^2 + i_e R_e^2 = 277{,}5$ W

$P_{\kappa\alpha\tau\alpha\nu} = 337{,}5 + 277{,}5 = 650 \text{ W} = P_{\pi\alpha\rho\varepsilon\chi}$

ε) Νόμος ρευμάτων Kirchhoff στους κόμβους του κυκλώματος

Κόμβος 1 (Κ1): $i_a = i_c + i_e$

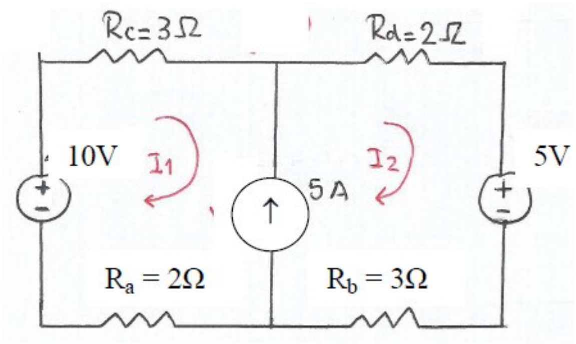
Κόμβος 2 (Κ2): $i_c + 5A = i_d$

Κόμβος 3 (Κ3): $i_d + i_e = i_b$

Κόμβος 4 (Κ4): $i_b = 5A + i_a$

Παράδειγμα: Εφαρμογή μεθόδου **απλών βρόχων** σε κύκλωμα με **ανεξάρτητη** πηγή **ρεύματος**

Στο κύκλωμα του σχήματος, να υπολογιστούν τα ρεύματα i_a, i_b, i_c, i_d που διαρρέουν τις αντίστοιχες αντιστάσεις καθώς και οι ισχείς P_a, P_b, P_c, P_d.



Λύση

Η πηγή ρεύματος (5A) αντικαθίσταται από μία πηγή τάσης η οποία είναι άγνωστη και συμβολίζεται ως v_x. Το σύστημα των εξισώσεων είναι το εξής:

$5i_1 = 10 - v_x$

$5i_2 = v_x - 5$

$i_2 - i_1 = 5$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις 2 πρώτες εξισώσεις, προκύπτει:

$5i_1 + 5i_2 = 5 \quad \Rightarrow \quad i_1 + i_2 = 1$

Η εξίσωση αυτή συνδυάζεται με την

$i_2 - i_1 = 5$

οπότε προκύπτει ότι

$i_1 = -2$ A

$i_2 = 3$ A

(Σχόλιο: Όντως $i_2 - i_1 = 5$ A)

Άρα

$i_a = i_c = i_1 = -2$ A

$i_b = i_d = i_2 = 3$ A

Δηλαδή

$i_a = 2$ A $(\rightarrow)$

$i_b = 3$ A $(\leftarrow)$

$i_c = 2$ A $(\leftarrow)$

$i_d = 3$ A $(\rightarrow)$

$v_a = i_a R_a = 4$ V $(+ , -)$

$v_b = i_b R_b = 9$ V $(- , +)$

$v_c = i_c R_c = 6$ V $(- , +)$

$v_d = i_d R_d = 6$ V $(+ , -)$

$P_a = i_a^2 R_a = 8$ W

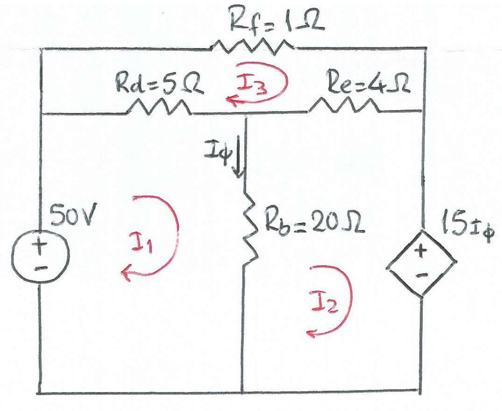
$P_b = i_b^2 R_b = 27$ W

$P_c = i_c^2 R_c = 12$ W

$P_d = i_d^2 R_d = 18$ W

Παράδειγμα: Εφαρμογή μεθόδου **απλών βρόχων** σε κύκλωμα με **εξαρτημένη** πηγή **τάσης** [5]

Στο κύκλωμα του σχήματος, να υπολογιστούν τα ρεύματα των αντιστάσεων.



Λύση

Ρεύματα βρόχων

$$\begin{vmatrix} 5+20 & -20 & -5 \\ -20 & 20+4 & -4 \\ -5 & -4 & 5+1+4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 50 \\ -15i_\phi \\ 0 \end{vmatrix}$$

$i_\varphi = i_1 - i_2$

$$\begin{aligned} 25i_1 - 20i_2 - 5i_3 &= 50 \\ -20i_1 + 24i_2 - 4i_3 &= -15i_\varphi \\ -5i_1 - 4i_2 + 10i_3 &= 0 \\ i_\varphi &= i_1 - i_2 \end{aligned}$$

Αν στη 2η εξίσωση, το i_φ αντικατασταθεί με $i_1 - i_2$, προκύπτει σύστημα 3 εξισώσεων και 3 αγνώστων.

Επιλύοντας, προκύπτει: $i_1 = 29{,}6$ A , $i_2 = 28$ A , $i_3 = 26$ A

Ρεύματα αντιστάσεων

$i_b = i_\varphi = i_1 - i_2 = 1{,}6$ A ($\downarrow$)

$i_d = i_1 - i_3 = 3{,}6$ A ($\rightarrow$)

$i_e = i_2 - i_3 = 2$ A ($\rightarrow$)

$i_f = i_3 = 26$ A ($\rightarrow$)

Τάσεις αντιστάσεων

$v_b = i_b R_b = 32$ V (+ στο άνω άκρο)

$v_d = i_d R_d = 18$ V (+ , –)

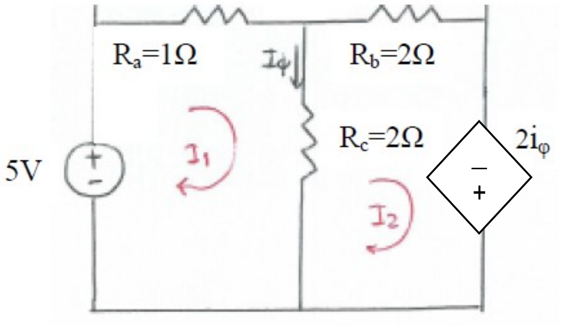
$v_e = i_e R_e = 8$ V (+ , –)

$v_f = i_f R_f = 26$ V (+ , –)

[5] Βλ. και Χατζαράκης Γ.Ε., *Ηλεκτρικά Κυκλώματα* (ενότητα 3.3, εδάφιο β1).

Παράδειγμα: Εφαρμογή μεθόδου **απλών βρόχων** σε κύκλωμα με **εξαρτημένη** πηγή **τάσης**

Στο κύκλωμα του σχήματος, να υπολογιστούν τα ρεύματα των αντιστάσεων.



Λύση

Ρεύματα βρόχων

$3i_1 - 2i_2 = 5$

$-2i_1 + 4i_2 = 2i_\varphi$

$i_\varphi = i_1 - i_2$

Στη 2η εξίσωση, θέτω $i_\varphi = i_1 - i_2$, οπότε

$-2i_1 + 4i_2 = i_\varphi \;\Rightarrow\; -2i_1 + 4i_2 = 2(i_1 - i_2) \;\Rightarrow\; -4i_1 = -6i_2 \;\Rightarrow\; i_1 = 1{,}5i_2$

Από την 1η εξίσωση

$3i_1 - 2i_2 = 5 \;\Rightarrow\; 4{,}5i_2 - 2i_2 = 5 \;\Rightarrow\; i_2 = 2\text{ A} \;\Rightarrow\; i_1 = 3\text{ A}$

Ρεύματα αντιστάσεων

$i_a = i_1 = 3\text{ A } (\rightarrow)$

$i_b = i_2 = 2\text{ A } (\rightarrow)$

$i = i_1 - i_2 = 1\text{ A } (\downarrow)$

Τάσεις αντιστάσεων

$v_a = i_a R_a = 3\text{ V } (+\,,\,-)$

$v_b = i_b R_b = 4\text{ V } (+\,,\,-)$

$v_c = i_c R_c = 6$ V (+ στο άνω άκρο)

Ισχείς στις αντιστάσεις

$P_a = i_a^2 R_a = 9\text{ W}$

$P_b = i_b^2 R_b = 8\text{ W}$

$P_c = i_c^2 R_c = 6\text{ W}$

3.2. Μέθοδος Κόμβων (Μ.Κ.)

3.2.1. Γενικά

Στη μέθοδο των κόμβων, οι **άγνωστοι** είναι οι **τάσεις** των **κόμβων**.

Ένας κόμβος επιλέγεται ως κόμβος αναφοράς (ως προς τον οποίο υπολογίζονται οι τάσεις των άλλων κόμβων). Η επιλογή είναι αυθαίρετη ωστόσο οι πράξεις απλουστεύονται αν ως κόμβος αναφοράς επιλεγεί αυτός που συμμετέχει στους περισσότερους κλάδους.

Το **σύστημα εξισώσεων** που προκύπτει έχει τη μορφή

$$\mathbf{G]\cdot[v] = [\Sigma i]} \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12}\ldots & G_{1n} \\ G_{21} & G_{22}\ldots & G_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ G_{n1} & G_{n2}\ldots & G_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \ldots \\ v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Sigma i_1 \\ \Sigma i_2 \\ \ldots \\ \Sigma i_3 \end{vmatrix}$$

όπου

- [G] είναι ο πίνακας των αγωγιμοτήτων (με τόσες γραμμές και στήλες όσοι οι κόμβοι του κυκλώματος).
- [v] είναι η στήλη με τις (άγνωστες) τάσεις των κόμβων (v_1, v_2, …).
- [Σi] είναι η στήλη των ρευμάτων. Κάθε στοιχείο περιέχει το (αλγεβρικό) άθροισμα των ρευμάτων του κόμβου.

Στον **πίνακα** των **αγωγιμοτήτων**:

- Τα **διαγώνια** στοιχεία $\mathbf{G_{ii}}$ (G_{11}, G_{22}, G_{33} …) εκφράζουν το άθροισμα των αγωγιμοτήτων που καταλήγουν στον αντίστοιχο κόμβο και είναι θετικά ($G_{ii} > 0$).
- Τα (**μη** διαγώνια) στοιχεία G_{ij} εκφράζουν το άθροισμα των αγωγιμοτήτων μεταξύ των κόμβων “i” και “j” (για παράδειγμα, το στοιχείο G_{12} εκφράζει το άθροισμα των αγωγιμοτήτων μεταξύ των κόμβων 1 και 2). Το **πρόσημο** των G_{ij} είναι πάντα **αρνητικό** ($G_{ij} < 0$).
- Ο πίνακας **[G]** είναι **συμμετρικός** ($G_{ij} = G_{ji}$).

Στην **στήλη** των **ρευμάτων**, τα **εισερχόμενα** (στον κόμβο) ρεύματα θεωρούνται **θετικά** (πρόσημο “+”) ενώ τα **εξερχόμενα** θεωρούνται **αρνητικά** (πρόσημο “–”).

3.2.2. Επίλυση του συστήματος – υπολογισμοί

Η επίλυση του συστήματος [G]·[v] = [Σi] παρέχει τις **τάσεις** των **κόμβων** (v_1, v_2, v_3, …) ως προς τον κόμβο αναφοράς.

Οι **τάσεις** των **αντιστάσεων** θα προκύψουν από τις τάσεις των κόμβων.

.

Η **ισχύς** P_R που καταναλώνεται σε μία **αντίσταση** R προκύπτει από τον τύπο $P_R = v_R.i_R = R.i_R^2$.

Η **ισχύς** P_S που παράγεται από μια **πηγή** δίνεται από τον τύπο $P_S = v_S.i_S$ όπου v_S η τάση της πηγής και i_S το ρεύμα στον κλάδο της πηγής.

Οι τάσεις και τα ρεύματα των αντιστάσεων θα πρέπει να ικανοποιούν το Νόμο Τάσεων Kirchhoff (Ν.Τ.Κ.) στους βρόχους και το Νόμο Ρευμάτων Kirchhoff (Ν.Ρ.Κ.) στους κόμβους.

Η παρεχόμενη στο κύκλωμα ισχύς είναι το άθροισμα των ισχύων που παράγονται από τις πηγές. Με τη σειρά της, η καταναλισκόμενη ισχύς είναι το άθροισμα των ισχύων που είτε απορροφώνται από τις πηγές είτε καταναλώνονται από τις αντιστάσεις

Η παρεχόμενη και η καταναλισκόμενη ισχύς είναι πάντα ίσες. Δηλαδή

$P_{\pi\alpha\rho\epsilon\chi} = P_{\kappa\alpha\tau\alpha\nu\alpha\lambda} \quad \Rightarrow \quad \sum P_{\pi\alpha\rho\alpha\gamma} = \sum P_{\alpha\pi o\rho\rho o\varphi} + \sum P_R$

Τα **βήματα** για την εφαρμογή της μεθόδου των απλών βρόχων μπορούν να συνοψιστούν ως εξής:

- Κατάστρωση του συστήματος $[R]\cdot[i] = [\sum v]$
- Επίλυση του συστήματος ώστε να υπολογιστούν τα ρεύματα των βρόχων (i_1, i_2, i_3, …).
- Υπολογισμός των ρευμάτων και των τάσεων των αντιστάσεων.
- Υπολογισμός της ισχύος σε κάθε αντίσταση και για κάθε πηγή.
- Έλεγχος των αποτελεσμάτων (π.χ. μέσω της εφαρμογής των Ν.Τ.Κ. και Ν.Ρ.Κ. ή/και της σχέσης $\sum P_S = \sum P_R$).

Σχόλιο: Όπως και στη Μ.Α.Κ., η επίλυση του συστήματος $[G]\cdot[v] = [\sum i]$ μπορεί να γίνει είτε με χρήση οριζουσών (μέθοδος Cramer) είτε με τη μέθοδο της αντικατάστασης. Η τελευταία προτιμάται όταν οι εξισώσεις είναι περισσότερες από 3 (π.χ. όταν υπάρχουν εξαρτημένες πηγές) ή όταν οι συντελεστές είναι τέτοιοι που να διευκολύνονται οι σχετικές πράξεις.

3.2.3. Υποπεριπτώσεις εφαρμογής της μεθόδου των κόμβων

Όταν οι πηγές του κυκλώματος είναι ανεξάρτητες πηγές ρεύματος, εφαρμόζεται αυτούσια η ανωτέρω διαδικασία.

Όταν στο κύκλωμα υπάρχει πηγή τάσης (ανεξάρτητη ή εξαρτημένη) η οποία είναι σε σειρά με αντίσταση μετατρέπεται σε πηγή ρεύματος (και στη συνέχεια, εφαρμόζεται αυτούσια η ανωτέρω διαδικασία).

Όταν στο κύκλωμα υπάρχει πηγή τάσης (ανεξάρτητη ή εξαρτημένη) η οποία δεν μπορεί να μετατραπεί εύκολα σε πηγή ρεύματος (δηλαδή δεν έχει αντίσταση σε σειρά) τότε αντικαθίσταται από μια άγνωστη πηγή ρεύματος. Δεδομένου ότι το πρόβλημα αποκτά έναν επιπλέον άγνωστο, απαιτείται μία ακόμη εξίσωση η οποία θα προκύψει από τη συσχέτιση της αρχικής πηγής τάσης με τις τάσεις των κόμβων.

3.2.4. Παραδείγματα – Ασκήσεις

Παράδειγμα: Εφαρμογή μεθόδου **κόμβων**[6]

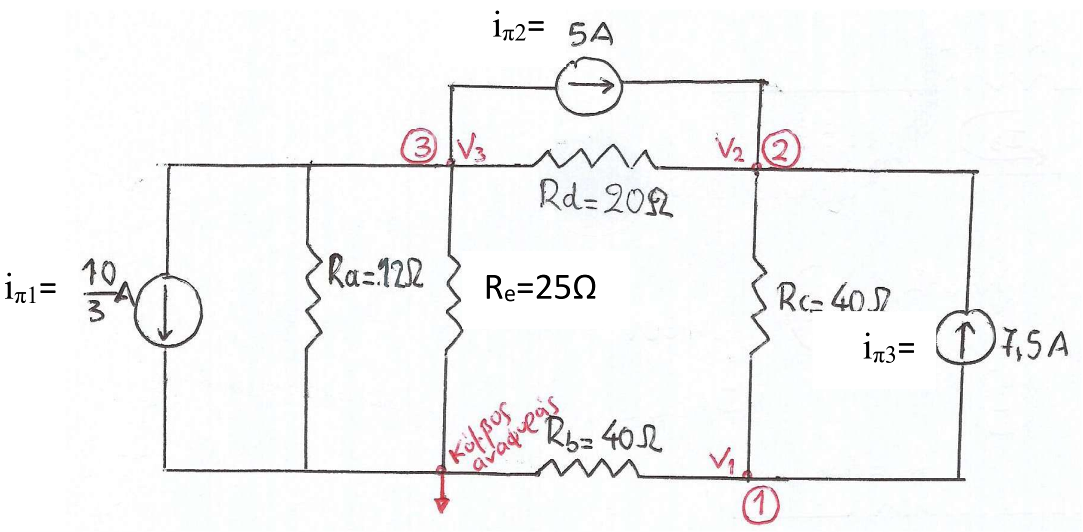
Στο κύκλωμα του σχήματος:

α) Να υπολογιστούν οι τάσεις των κλάδων.

β) Να υπολογιστούν τα ρεύματα των κλάδων.

γ) Να υπολογιστεί η συνολική παρεχόμενη ισχύς και η συνολική καταναλισκόμενη ισχύς (και να επαληθευτεί ότι είναι ίσες).

ε) Να επαληθευτεί ο νόμος ρευμάτων Kirchhoff στους κόμβους του κυκλώματος.



Λύση

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{40}+\frac{1}{40} & -\frac{1}{40} & 0 \\ -\frac{1}{40} & \frac{1}{40}+\frac{1}{20} & -\frac{1}{20} \\ 0 & -\frac{1}{20} & \frac{1}{12}+\frac{1}{25}+\frac{1}{20} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7,5 \\ 5+7,5 \\ -5-\frac{10}{3} \end{vmatrix}$$

[6] Βλ. και Χατζαράκης Γ.Ε., *Ηλεκτρικά Κυκλώματα* (ενότητα 3.5, εδάφιο α1).

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{20} & -\frac{1}{40} & 0 \\ -\frac{1}{40} & \frac{3}{40} & -\frac{1}{20} \\ 0 & -\frac{1}{20} & \frac{52}{300} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7{,}5 \\ 12{,}5 \\ -\frac{25}{3} \end{vmatrix}$$

$$\frac{1}{20}v_1 - \frac{1}{40}v_2 + 0v_3 = -7{,}5$$

$$-\frac{1}{40}v_1 + \frac{3}{40}v_2 - \frac{1}{20}v_3 = 12{,}5$$

$$0v_1 - \frac{1}{20}v_2 + \frac{52}{300}v_3 = -\frac{25}{3}$$

$$\begin{aligned} 2v_1 - 1v_2 + 0v_3 &= -300 \\ -1v_1 + 3v_2 - 2v_3 &= 500 \\ 0v_1 - 15v_2 + 52v_3 &= -2500 \end{aligned}$$

$$v_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad , \quad v_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad , \quad v_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -15 & 52 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -15 & 52 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 52 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -15 \end{vmatrix}$$

$$= 7\bullet[3\bullet5 - (-2)(-15)] - (-1)\bullet[(-1)(5) - (-2)(0)] + 0\bullet[(-1)(-15) - 3\bullet0] = 200$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -300 & -1 & 0 \\ 500 & 3 & -2 \\ -2500 & -15 & 5 \end{vmatrix} = -16800$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -300 & 0 \\ -1 & 500 & -2 \\ 0 & -2500 & 5 \end{vmatrix} = 26400$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -300 \\ -1 & 3 & 500 \\ 0 & -15 & -2500 \end{vmatrix} = -2000$$

$v_1 = -84$ V , $v_2 = 132$ V , $v_3 = -10$ V α) Τάσεις κλάδων (με αναφορά στο σχήμα που ακολουθεί)

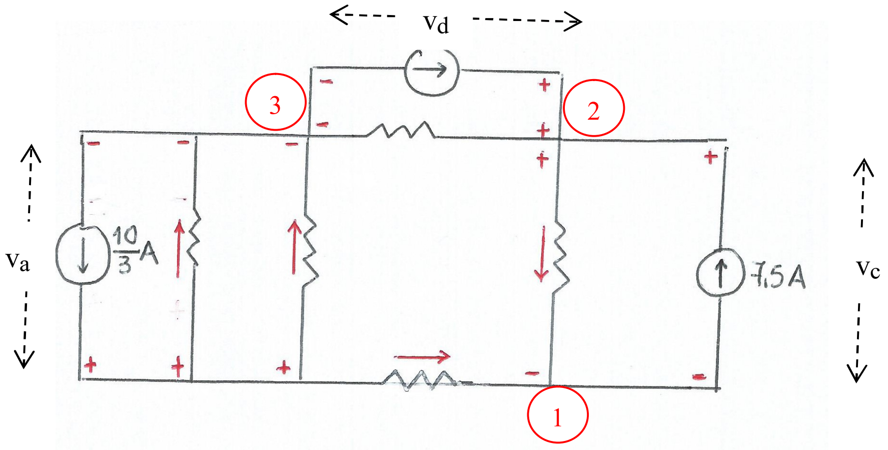
$v_a = -v_3 = 10$ V (ο κόμβος αναφοράς έχει υψηλότερο δυναμικό από αυτό του κόμβου 3)

$v_b = -v_1 = 84$ V (ο κόμβος αναφοράς έχει υψηλότερο δυναμικό από αυτό του κόμβου 1)

$v_c = v_2 - v_1 = 216$ V (ο κόμβος 2 έχει υψηλότερο δυναμικό από αυτό του κόμβου 1)

$v_d = v_2 - v_3 = 142$ V (ο κόμβος 2 έχει υψηλότερο δυναμικό από αυτό του κόμβου 3)

$v_e = -v_3 = 10$ V (ο κόμβος αναφοράς έχει υψηλότερο δυναμικό από αυτό του κόμβου 3)



β) Ρεύματα κλάδων

$i_a = \dfrac{v_a}{R_a} = 0{,}83$ A

$i_b = \dfrac{v_b}{R_b} = 2{,}1$ A

$i_c = \dfrac{v_c}{R_c} = 5{,}4$ A

$i_d = \dfrac{v_d}{R_d} = 7{,}1$ A

$i_e = \dfrac{v_e}{R_e} = 0{,}4$ A

(οι κατευθύνσεις όπως στο σχήμα)

γ) Συνολική παρεχόμενη και συνολική καταναλισκόμενη ισχύς

$P_{\pi\alpha\rho\varepsilon\chi} = v_a \bullet \dfrac{10}{3} + v_d \bullet 5 + v_c \bullet 7{,}5 = 2363{,}33$ W

$P_{\kappa\alpha\tau\alpha\nu} = i_a^2 R_a + i_b^2 R_b + i_c^2 R_c + i_d^2 R_d + i_e^2 R_e = 2363{,}33$ W

ε) Νόμος ρευμάτων Kirchhoff στους κόμβους του κυκλώματος

Κόμβος 1: $i_b + i_c = 7{,}5$ A

Κόμβος 2: $i_c + i_d = 12{,}5 \text{ A} = 5 + 7{,}5$ (A)

Κόμβος 3: $i_e + i_a + i_d = 8{,}33 \text{ A} = \dfrac{10}{3} + 5$ (A)

Κόμβος αναφοράς: $\dfrac{10}{3} = i_a + i_b + i_e = 3{,}33 \text{ A} = \dfrac{10}{3}$ A

Παράδειγμα: Εφαρμογή μεθόδου **κόμβων** σε κύκλωμα με **ανεξάρτητη** πηγή **τάσης** [7]

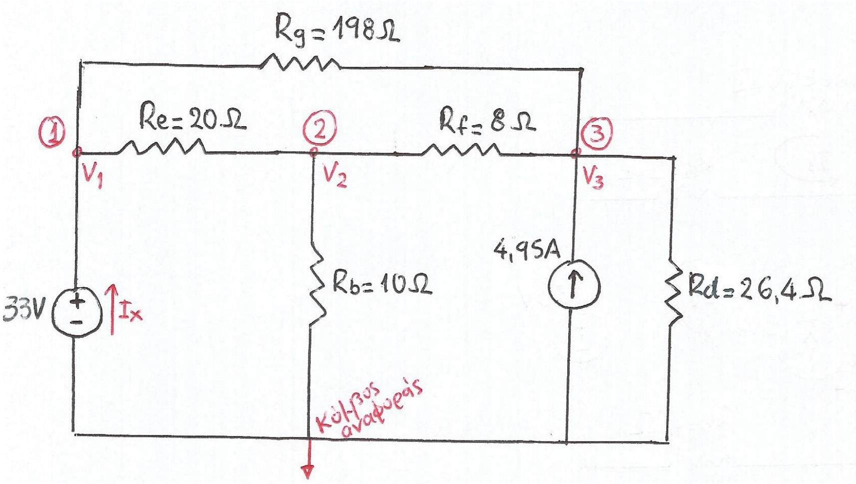
Στο κύκλωμα του σχήματος:

α) Να υπολογιστούν οι τάσεις των κλάδων.

β) Να υπολογιστούν τα ρεύματα των κλάδων.

γ) Να υπολογιστεί η συνολική παρεχόμενη ισχύς και η συνολική καταναλισκόμενη ισχύς (και να επαληθευτεί ότι είναι ίσες).

ε) Να επαληθευτεί ο νόμος ρευμάτων Kirchhoff στους κόμβους του κυκλώματος.



Λύση

Η πηγή τάσης (33V) αντικαθίσταται από μία πηγή τάσης η οποία είναι άγνωστη και συμβολίζεται ως i_x. Το σύστημα των εξισώσεων, σε μορφή πίνακα, είναι το εξής:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{20}+\frac{1}{198} & -\frac{1}{20} & -\frac{1}{198} \\ -\frac{1}{20} & \frac{1}{20}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{198} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8}+\frac{1}{198}+\frac{1}{26,4} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i_x \\ 0 \\ 4,95 \end{vmatrix}$$

Η επιπλέον εξίσωση που απαιτείται (δεδομένου ότι το σύστημα έχει τον επιπλέον άγνωστο i_x) προκύπτει από την παρατήρηση ότι $v_1 = 33$V.

Από την επίλυση του συστήματος (με τη μέθοδο της αντικατάστασης) προκύπτει ότι
$v_1 = 33$ V , $v_2 = 30$ V , $v_3 = 52,8$ V

α) Τάσεις κόμβων

$v_b = v_2 = 30$ V (ο κόμβος 2 έχει υψηλότερο δυναμικό από αυτό του κόμβου αναφοράς)

$v_e = v_1 - v_2 = 3$ V (ο κόμβος 1 έχει υψηλότερο δυναμικό από αυτό του κόμβου 2)

$v_f = v_3 - v_2 = 22,8$ V (ο κόμβος 3 έχει υψηλότερο δυναμικό από αυτό του κόμβου 2)

$v_g = v_3 - v_1 = 19,8$ V (ο κόμβος 3 έχει υψηλότερο δυναμικό από αυτό του κόμβου 1)

[7] Βλ. και Χατζαράκης Γ.Ε., *Ηλεκτρικά Κυκλώματα* (ενότητα 3.5, εδάφιο α2).

β) Ρεύματα κλάδων

$i_b = \dfrac{v_b}{R_b}$ = 3 A (με κατεύθυνση προς τα κάτω)

$i_d = \dfrac{v_3}{R_d}$ = 2 A (με κατεύθυνση προς τα κάτω)

$i_e = \dfrac{v_e}{R_e}$ = 0,15 A (με κατεύθυνση προς τα δεξιά)

$i_f = \dfrac{v_f}{R_f}$ = 2,85 A (με κατεύθυνση προς τα αριστερά)

$i_g = \dfrac{v_g}{R_g}$ = 0,1 A (με κατεύθυνση προς τα αριστερά)

γ) Νόμος ρευμάτων Kirchhoff στους κόμβους του κυκλώματος (ενδεικτικά στον κόμβο 3)

Κόμβος 3: $i_d + i_f + i_g = 4{,}95$ A

(τα 4,95 A είναι εισερχόμενο ρεύμα ενώ τα i_d, i_f, i_g είναι εξερχόμενα ρεύματα)

Παραπομπές κεφαλαίου

Γ.Ε. Χατζαράκης. Ηλεκτρικά Κυκλώματα, Εκδ. Τζιόλα & Υιοί, 2015.
Ενότητες: 3.1, 3.2 (α1, α2, β1), 3.5 (α1).
Εφαρμογές (λυμένες ασκήσεις, ενότητα 3.8): 1η.