4. ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΩΜΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ[1]

4.1. Γενικά

Τα θεωρήματα κυκλωμάτων εφαρμόζονται σε γραμμικά κυκλώματα (ωμικά ή άλλου τύπου) προκειμένου, μέσω της δημιουργίας απλούστερων ισοδύναμων κυκλωμάτων, να διευκολυνθεί η μελέτη και η επίλυση των κυκλωμάτων αυτών.

Τα κυριότερα θεωρήματα είναι τα παρακάτω:

- Η αρχή της επαλληλίας (ή υπέρθεσης).
- Το θεώρημα Thevenin (και το ισοδύναμο θεώρημα Norton).
- Το θεώρημα της μέγιστης μεταφοράς ισχύος.
- Το θεώρημα Millman.
- Το θεώρημα της αμοιβαιότητας.
- Τα θεωρήματα συμμετρικών κυκλωμάτων.

[1] Αν και η παρούσα ενότητα αφορά τα γραμμικά ωμικά κυκλώματα, τα θεωρήματα που παρουσιάζονται μπορούν να εφαρμοστούν σε οποιοδήποτε γραμμικό κύκλωμα ανεξάρτητα από τα στοιχεία που περιέχει.

4.2. Αρχή της επαλληλίας (ή υπέρθεσης)

Η συγκεκριμένη αρχή διατυπώνεται ως εξής:

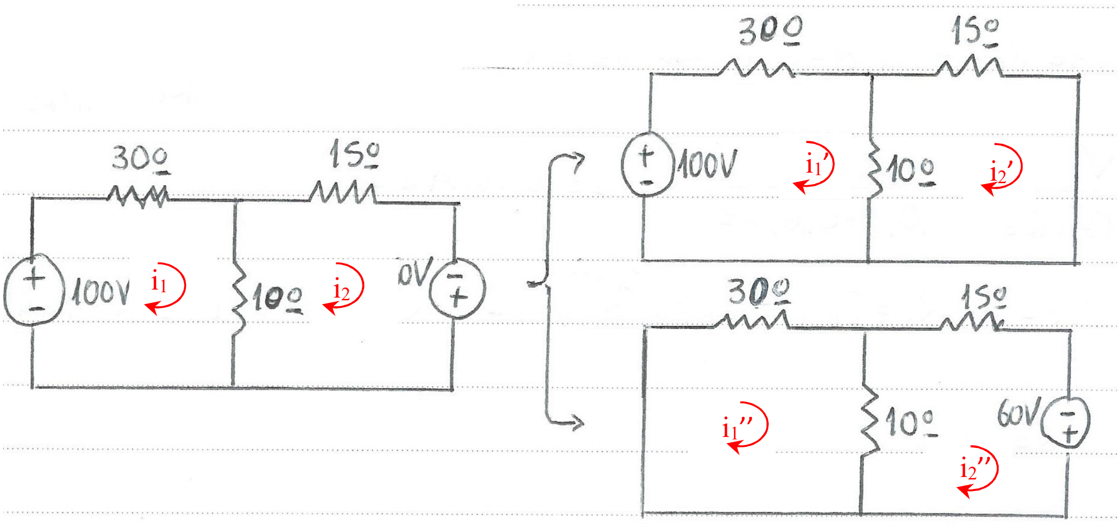
- Σε κύκλωμα που περιέχει **μόνο ανεξάρτητες πηγές**: Σε ένα γραμμικό ωμικό κύκλωμα που περιέχει n ανεξάρτητες πηγές τάσης ή/και ρεύματος, η τάση ή το ρεύμα ενός κλάδου ισούται με το άθροισμα των επιμέρους τάσεων ή των ρευμάτων που προκύπτουν αν κάθε πηγή (τάσης ή ρεύματος) ενεργήσει ξεχωριστά.
- Σε κύκλωμα που περιέχει **ανεξάρτητες και εξαρτημένες πηγές**: Σε ένα γραμμικό ωμικό κύκλωμα που περιέχει ανεξάρτητες και εξαρτημένες πηγές τάσης ή/και ρεύματος, η τάση ή το ρεύμα ενός κλάδου ισούται με το άθροισμα των επιμέρους τάσεων ή των ρευμάτων που προκύπτουν αν κάθε ανεξάρτητη πηγή (τάσης ή ρεύματος) ενεργήσει ξεχωριστά **παρουσία** όλων των **εξαρτημένων πηγών**.

Τα παραπάνω σημαίνουν ότι κάθε φορά ενεργεί μόνο μία ανεξάρτητη πηγή ενώ οι άλλες (ανεξάρτητες) πηγές μηδενίζονται. **Μηδενισμός** για μια πηγή **τάσης** σημαίνει **βραχυκύκλωση** ($v_s = 0$) ενώ για μια πηγή **ρεύματος** σημαίνει **ανοικτοκύκλωση** ($i_s = 0$).

Επισημαίνονται τα εξής:

- Για την εφαρμογή της αρχής της επαλληλίας, είναι απαραίτητο τα στοιχεία του κυκλώματος να είναι γραμμικά (βλ. και αντιπαράδειγμα στο τέλος της παρούσας ενότητας).
- Η αρχή της επαλληλίας **δεν** μπορεί να εφαρμοστεί για τον υπολογισμό της μέσης ισχύος επειδή η μέση ισχύς είναι **μη** γραμμική ποσότητα ($p = v.i = i^2R$).

Παράδειγμα: Εφαρμογή της αρχής της **επαλληλίας** σε κύκλωμα με **ανεξάρτητες** (μόνο) πηγές



Λύση

Υπο-κύκλωμα 1

$$\begin{vmatrix} 30+10 & -10 \\ -10 & 10+15 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_1' \\ i_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 100 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$40i_1' - 10i_2' = 100$
$-10i_1' + 25i_2' = 0$

Προκύπτει
$i_1' = 2{,}78$ A
$i_2' = 1{,}11$ A

Άρα
$i_{30}' = i_1' = 2{,}78$ A
$i_{10}' = i_1' - i_2' = 1{,}67$ A
$i_{15}' = i_2' = 1{,}11$ A

$v_{30}' = i_{30}'(30\Omega) = 83{,}4$ V
$v_{10}' = i_{10}'(10\Omega) = 16{,}7$ V
$v_{15}' = i_{15}'(15\Omega) = 16{,}7$ V

Υπο-κύκλωμα 2

$$\begin{vmatrix} 30+10 & -10 \\ -10 & 10+15 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_1'' \\ i_2'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 60 \end{vmatrix}$$

$40i_1'' - 10i_2'' = 0$
$-10i_1'' + 25i_2'' = 60$

Προκύπτει
$i_1'' = 0{,}67$ A
$i_2'' = 2{,}67$ A

Άρα
$i_{30}'' = i_1'' = 0,67$ A
$i_{10}'' = i_1'' - i_2'' = -2$ A
$i_{15}'' = i_2'' = 2,67$ A

$v_{30}'' = i_{30}''(30\Omega) = 20,1$ V
$v_{10}'' = i_{10}''(10\Omega) = -20$ V
$v_{15}'' = i_{15}''(15\Omega) = 40,1$ V

Υπέρθεση

$i_{30} = i_{30}' + i_{30}'' = 3,45$ A ($\rightarrow$)
$i_{10} = i_{10}' + i_{10}'' = -0,33$ A ($\uparrow$)
$i_{15} = i_{15}' + i_{15}'' = 3,78$ A ($\rightarrow$)
(Το ρεύμα i_{10} έχει κατεύθυνση προς τα πάνω διότι έχει το πρόσημο των i_2', i_2'', i_2 που, για την αντίσταση των 10 Ω έχουν κατεύθυνση προς τα πάνω).

$v_{30} = v_{30}' + v_{30}'' = 103,5$ V
$v_{10} = v_{10}' + v_{10}'' = -3,3$ V
$v_{15} = v_{15}' + v_{15}'' = 56,7$ V

Υπολογισμός ισχύων

Για την ισχύ, δεν μπορεί να εφαρμοστεί το θεώρημα της επαλληλίας, διότι η ισχύς είναι μη γραμμική ποσότητα. Συνεπώς, η ισχύς στις αντιστάσεις των 30, 10 και 15 Ω θα υπολογιστεί με βάση τις συνολικές τιμές των αντίστοιχων τάσεων και ρευμάτων.

$P_{30} = v_{30} \bullet i_{30} = i_{30}^2(30\Omega) = 357,1$ W
$P_{10} = v_{10} \bullet i_{10} = i_{10}^2(10\Omega) = 108,9$ W
$P_{15} = v_{15} \bullet i_{15} = i_{15}^2(15\Omega) = 214,3$ W

Δοκιμή (επίλυση του **αρχικού** κυκλώματος με τη μέθοδο των βρόχων)

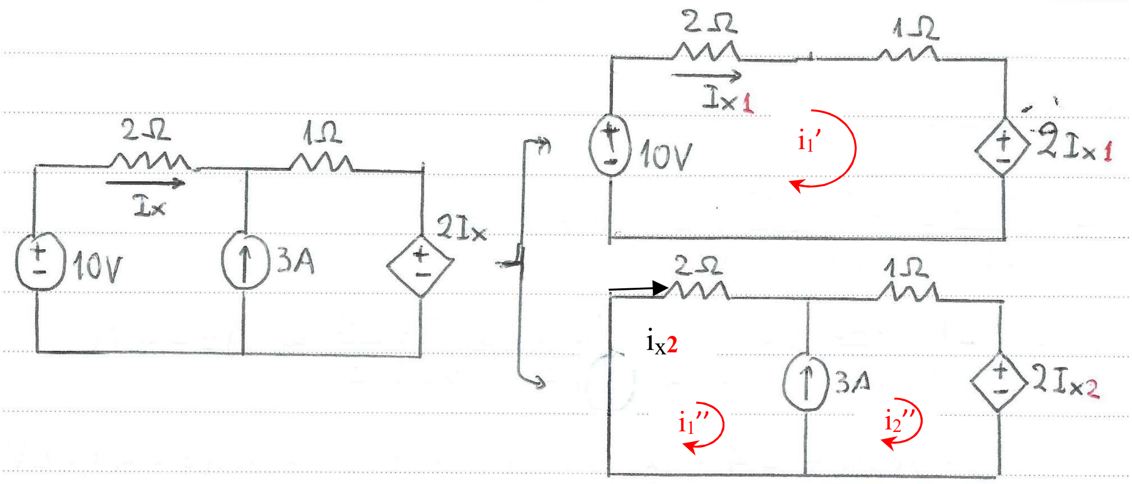
$$\begin{vmatrix} 30+10 & -10 \\ -10 & 10+15 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_1 \\ i_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 100 \\ 60 \end{vmatrix}$$

$40i_1 - 10i_2 = 100$
$-10i_1 + 25i_2 = 60$

Προκύπτει
$i_1 = 3,45$ A
$i_2 = 3,78$ A

άρα
$i_{30} = i_1 = 3,45$ A
$i_{10} = i_1 - i_2 = -0,33$ A
$i_{15} = i_2 = 3,78$ A
(δηλαδή τα αποτελέσματα που προέκυψαν με την εφαρμογή του θεωρήματος επαλληλίας).

<u>Παράδειγμα: Εφαρμογή της αρχής της επαλληλίας σε κύκλωμα με **ανεξάρτητες** και **εξαρτημένες** πηγές</u>



<u>Λύση</u>

Υπο-κύκλωμα 1

$i_{x1} = i_1'$

$10 - 2i_1' = i_1'(2+1) \;\Rightarrow\; i_1' = 2\ \text{A} \quad (\Rightarrow \; i_{x1} = 2\ \text{A})$

$i_{2\Omega}' = i_1' = 2\ \text{A}$

$i_{1\Omega}' = i_1' = 2\ \text{A}$

$v_{2\Omega}' = i_{2\Omega}'(2\Omega) = 4\ \text{V}$

$v_{1\Omega}' = i_{1\Omega}'(1\Omega) = 2\ \text{V}$

Υπο-κύκλωμα 2

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i''_1 \\ i''_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -v_X \\ v_X - 2i_{X2} \end{vmatrix}$$

$i_{x2} = i_1''$

$3 = i_2'' - i_1''$

Προκύπτει

$i_1'' = -0{,}75\ \text{A}$

$i_2'' = 2{,}25\ \text{A}$

$i_{2\Omega}' = i_1'' = -0{,}75\ \text{A}$

$i_{1\Omega}' = i_2'' = 2{,}25\ \text{A}$

$v_{2\Omega}'' = i_{2\Omega}''(2\Omega) = -1{,}5\ \text{V}$

$v_{1\Omega}'' = i_{1\Omega}''(1\Omega) = 2{,}25\ \text{V}$

Υπέρθεση

$i_{2\Omega} = i_{2\Omega}' + i_{2\Omega}'' = 2 - 0{,}75 = 1{,}25\ \text{A}\ (\rightarrow)$

$i_{1\Omega} = i_{1\Omega}' + i_{1\Omega}'' = 2 + 2{,}25 = 4{,}25\ \text{A}\ (\rightarrow)$

$v_{2\Omega} = v_{2\Omega}' + v_{2\Omega}'' = 4 - 1{,}5 = 2{,}5\ \text{V}$

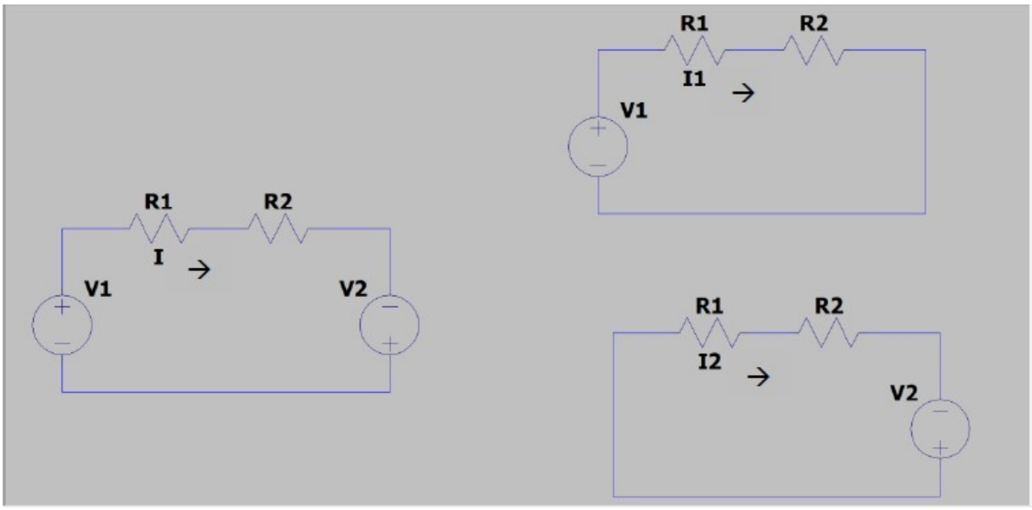
$v_{1\Omega} = v_{1\Omega}' + v_{1\Omega}'' = 2 + 2{,}25 = 4{,}25\ \text{V}$

Υπολογισμός ισχύων

$P_{2\Omega} = v_{2\Omega} \bullet i_{2\Omega} = i_{2\Omega}^2(2\Omega) = 3{,}125\ \text{W}$

$P_{1\Omega} = v_{1\Omega} \bullet i_{1\Omega} = i_{1\Omega}^2(1\Omega) = 4{,}25\ \text{W}$

Στο κύκλωμα του σχήματος v_1 = 10 V, v_2 = 4 V, R_1 = i (Ω) (R_1 = a.i με a = 1 Ω/A), R_2 = 3 Ω, δηλαδή η αντίσταση R_1 δεν είναι γραμμική (εξαρτάται από το ρεύμα i του κυκλώματος).
Να καταδειχθεί το γεγονός ότι, στο συγκεκριμένο κύκλωμα, η αρχή της επαλληλίας δεν μπορεί να εφαρμοστεί (το αρχικό κύκλωμα δεξιά δίνει διαφορετική τιμή για το ρεύμα από ό,τι τα δύο υπο-κυκλώματα αριστερά, όταν υπερτεθούν).



Λύση

Αρχικό κύκλωμα
$v_1 + v_2 = (R_1 + R_2)i \;\Rightarrow\; 14 = (i + 3)i \;\Rightarrow\; i^2 + 3i - 14 = 0 \;\Rightarrow\; i = 2{,}63$ A

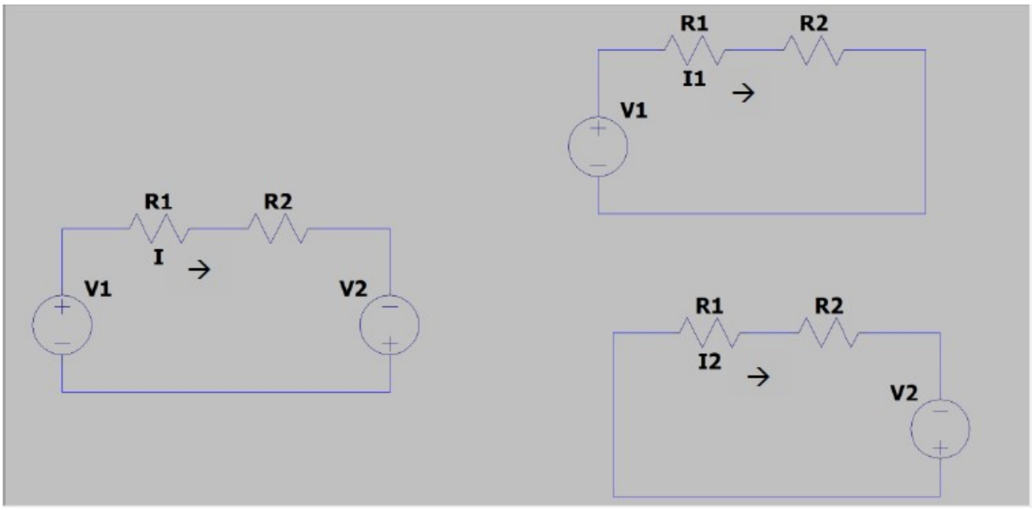
Υπο-κύκλωμα 1
$v_1 = (R_1 + R_2)i_1 \;\Rightarrow\; 10 = (i_1 + 3)i_1 \;\Rightarrow\; i_1^2 + 3i_1 - 10 = 0 \;\Rightarrow\; i_1 = 2$ A

Υπο-κύκλωμα 2
$v_2 = (R_1 + R_2)i_2 \;\Rightarrow\; 4 = (i_2 + 3)i_2 \;\Rightarrow\; i_2^2 + 3i_2 - 4 = 0 \;\Rightarrow\; i_2 = 1$ A

Υπέρθεση
Προφανώς $i_1 + i_2 \neq i$

Αντι-παράδειγμα: Η αρχή της επαλληλίας δεν μπορεί να εφαρμοστεί για τον υπολογισμό της ισχύος

Στο κύκλωμα του σχήματος $v_1 = 10$ V, $v_2 = 5$ V, $R_1 = 2\ \Omega$, $R_2 = 3\Omega$,.
Να καταδειχθεί το γεγονός ότι η αρχή της επαλληλίας δεν μπορεί να εφαρμοστεί για τον υπολογισμό της μέσης ισχύος (το αρχικό κύκλωμα δεξιά δίνει διαφορετικό αποτέλεσμα από ό,τι τα δύο υπο-κυκλώματα αριστερά, όταν υπερτεθούν).



Λύση

Αρχικό κύκλωμα
$v_1 + v_2 = (R_1 + R_2)i \Rightarrow 15 = (2 + 3)i \Rightarrow i = 3$ A
$P_1 = i^2R_1 = 18$ W

Υπο-κύκλωμα 1
$v_1 = (R_1 + R_2)i_1 \Rightarrow 10 = (2 + 3)i_1 \Rightarrow i_1 = 2$ A
$P_{1,1} = i_1^2R_1 = 8$ W

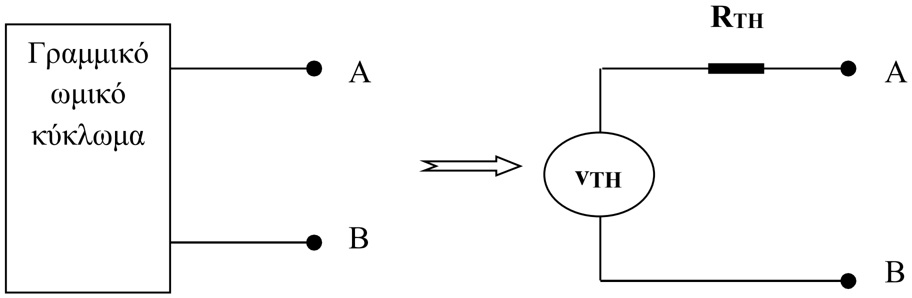
Υπο-κύκλωμα 2
$v_2 = (R_1 + R_2)i_2 \Rightarrow 5 = (2 + 3)i_2 \Rightarrow i_2 = 1$ A
$P_{1,2} = i_1^2R_1 = 2$ W

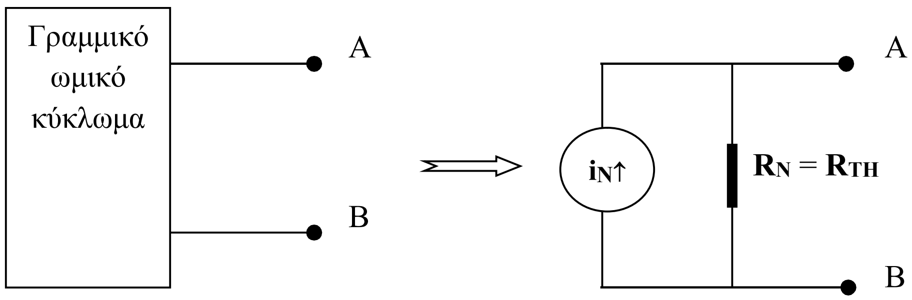
Υπέρθεση
Προφανώς $P_{1,1} + P_{1,2} \neq P_1$

4.3. Θεωρήματα Thevenin και Norton

Για γραμμικά ωμικά κυκλώματα, τα θεωρήματα Thevenin και Norton διατυπώνονται ως εξής:

Σε ένα γραμμικό ωμικό κύκλωμα με δύο ανοικτούς ακροδέκτες A και B, το κύκλωμα μπορεί να αντικατασταθεί είτε από μια ανεξάρτητη πηγή **τάσης** σε **σειρά** με μία **αντίσταση** (θεώρημα **Thevenin**) είτε από μια ανεξάρτητη πηγή **ρεύματος παράλληλα** με μία **αντίσταση** (θεώρημα **Norton**).





Στα ισοδύναμα κυκλώματα Thevenin και Norton:

- **v_{TH}** (τάση Thevenin) είναι η τάση ανοικτοκύκλωσης του ωμικού κυκλώματος μεταξύ των ακροδεκτών A και B.
- **i_N** (ρεύμα Norton) είναι η τάση βραχυκύκλωσης του ωμικού κυκλώματος μεταξύ των ακροδεκτών A και B.
- **$R_{TH} = R_N$** (αντίσταση Thevenin/Norton) είναι η ισοδύναμη αντίσταση μεταξύ των ακροδεκτών A και B.

Ο υπολογισμός των ανωτέρω παραμέτρων γίνεται ως εξής:

- Εάν το κύκλωμα περιέχει **μόνο ανεξάρτητες** πηγές:
  - ✓ Η **τάση Thevenin v_{TH}** υπολογίζεται ως η **τάση ανοικτοκύκλωσης** μεταξύ των ακροδεκτών A και B (με χρήση τεχνικών επίλυσης κυκλωμάτων όπως η Μ.Α.Β., η Μ.Κ. κλπ.).
  - ✓ Η **αντίσταση Thevenin** και η **αντίσταση Norton** (**$R_{TH} = R_N$**) υπολογίζονται ως η ισοδύναμη αντίσταση μεταξύ των ακροδεκτών A και B όπως προκύπτει μετά από το **μηδενισμό** των **πηγών** (βραχυκύκλωση για πηγές τάσης, ανοικτοκύκλωση για πηγές ρεύματος).

- ✓ Το **ρεύμα Norton i_N** υπολογίζεται είτε ως $i_N = \frac{v_{TH}}{R_{TH}}$ (ο ευκολότερος τρόπος) είτε ως το **ρεύμα βραχυκύκλωσης** μεταξύ των ακροδεκτών Α και Β (με χρήση τεχνικών επίλυσης κυκλωμάτων όπως η Μ.Α.Β., η Μ.Κ. κλπ.).

- Εάν το κύκλωμα περιέχει **ανεξάρτητες** και **εξαρτημένες** πηγές:
  - ✓ Η **τάση Thevenin v_{TH}** υπολογίζεται (όπως και πριν) ως η **τάση ανοικτοκύκλωσης** μεταξύ των ακροδεκτών Α και Β (με χρήση τεχνικών επίλυσης κυκλωμάτων όπως η Μ.Α.Β., η Μ.Κ. κλπ.).
  - ✓ Το **ρεύμα Norton i_N** υπολογίζεται ως το **ρεύμα βραχυκύκλωσης** μεταξύ των ακροδεκτών Α και Β (με χρήση τεχνικών επίλυσης κυκλωμάτων όπως η Μ.Α.Β., η Μ.Κ. κλπ.).
  - ✓ $\mathbf{R_{TH}} = \mathbf{R_N} = \frac{v_{TH}}{i_N}$. Επισημαίνεται ότι η παρουσία εξαρτημένων πηγών δεν επιτρέπει τη χρήση ισοδύναμου κυκλώματος για τον υπολογισμό των αντιστάσεων Thevenin / Norton.

- Εάν το κύκλωμα περιέχει **μόνο εξαρτημένες** πηγές:
  - ✓ Εδώ $\mathbf{v_{TH} = 0}$ και το $\mathbf{i_N = 0}$.
  - ✓ Για τον υπολογισμό της $\mathbf{R_{TH}}$ (= $\mathbf{R_N}$) συνδέεται στους ακροδέκτες Α και Β μια ανεξάρτητη πηγή ρεύματος 1Α και υπολογίζεται η v_{AB} (με τις συνήθεις τεχνικές επίλυσης κυκλωμάτων). Είναι $\mathbf{R_{TH}} = \frac{v_{AB}}{1A} = \mathbf{R_N}$.

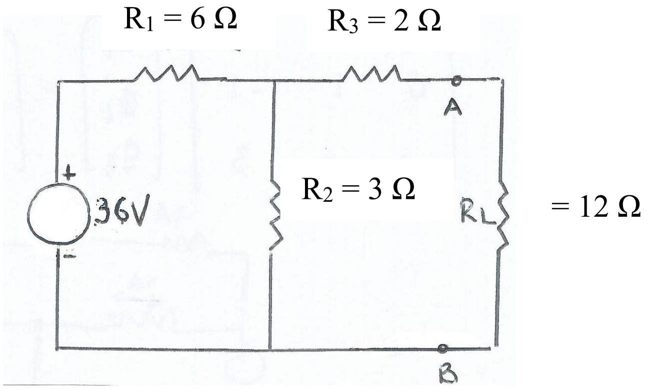
Παράδειγμα: Εφαρμογή θεωρημάτων Thevenin / Norton σε κύκλωμα με **ανεξάρτητες** πηγές

Στο κύκλωμα του σχήματος, να υπολογιστούν:

(α) Η **τάση** και η **αντίσταση Thevenin** (v_{TH}, R_{TH}) και, μετά, το **ρεύμα** και η **αντίσταση Norton** (i_N, R_N) για τα σημεία Α και Β με χρήση του **θεωρήματος Thevenin**.

(β) Το **ρεύμα** και η **αντίσταση Norton** (i_N, R_N) και η **τάση** και η **αντίσταση Thevenin** (v_{TH}, R_{TH}) για τα σημεία Α και Β με χρήση του **θεωρήματος Norton**.

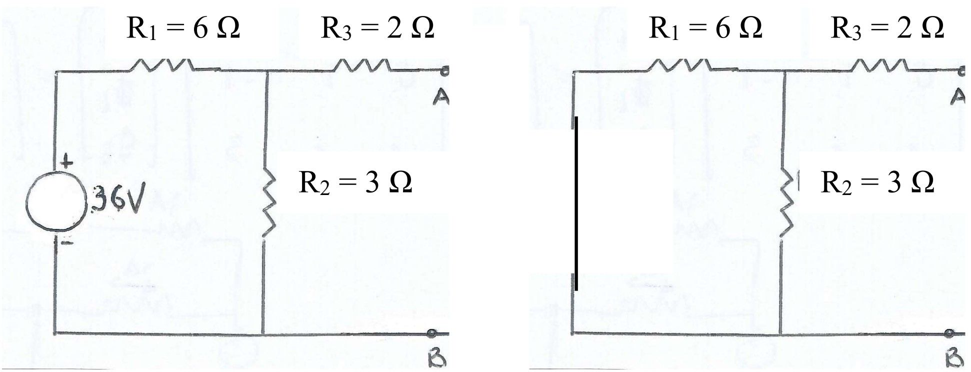
(γ) Η τάση v_l και το ρεύμα i_l του **φορτίου** R_l.



Λύση

(α) Με χρήση θεωρήματος **Thevenin**

Για τον υπολογισμό της **τάσης** Thevenin v_{TH}, τα άκρα του φορτίου **ανοικτοκυκλώνονται** (σχήμα, αριστερά) ενώ η **αντίσταση** Thevenin R_{TH} υπολογίζεται ως η **ισοδύναμη** αντίσταση μεταξύ των ακροδεκτών Α και Β με τις πηγές **μηδενισμένες** (σχήμα, δεξιά).



$v_{TH} = v_{AB} = v_{R2} = 36\dfrac{3}{6+3} = 12$ V

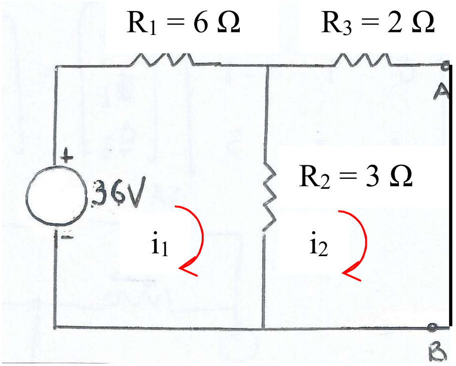
$R_{TH} = 6//3 + 2 = 4\ \Omega$

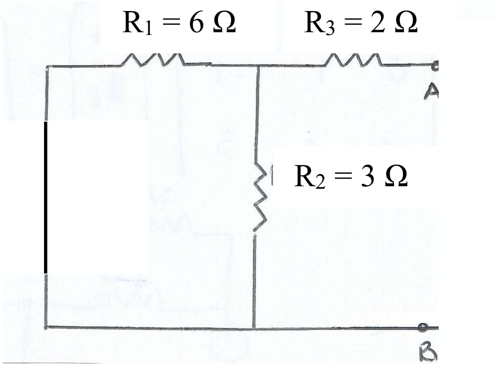
$i_N = \dfrac{v_{TH}}{R_{TH}} = 3$ A

$R_N = R_{TH} = 4\ \Omega$

(β) Με χρήση θεωρήματος **Norton**

Για τον υπολογισμό του **ρεύματος** Norton i_N, τα άκρα του φορτίου **βραχυκυκλώνονται** (σχήμα, αριστερά) ενώ η **αντίσταση** Norton R_N υπολογίζεται (ακριβώς όπως και η αντίσταση Thevenin) ως η **ισοδύναμη** αντίσταση μεταξύ των ακροδεκτών A και B με τις πηγές **μηδενισμένες** (σχήμα, δεξιά).





Ρεύματα βρόχων και κλάδων

$$\begin{vmatrix} 6+3 & -3 \\ -3 & 3+2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_1 \\ i_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 36 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$9i_1 - 3i_2 = 36$

$-3i_1 + 5i_2 = 0$

Επιλύοντας προκύπτει $i_2 = 3$ A

Ρεύμα Norton

Δεδομένου ότι $i_N = i_2 \quad \Rightarrow \quad i_N = 3$ A

Αντίσταση Norton

$R_N = 6//3 + 2 = 4\ \Omega$

(υπολογίζεται όπως και η αντίσταση Thevenin)

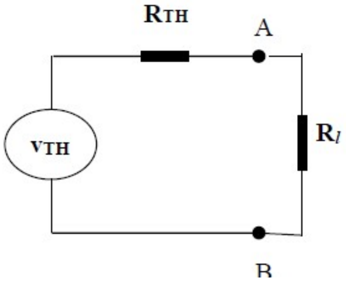
Τάση και αντίσταση Thevenin

$v_{TH} = i_N R_N = 12$ V

$R_{TH} = R_N = 4\ \Omega$

(γ) Τάση και ρεύμα **φορτίου** R_l

Για τον υπολογισμό των v_l, i_l θα χρησιμοποιηθεί το παρακάτω ισοδύναμο (κατά Thevenin) κύκλωμα (θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί και το ισοδύναμο Norton).

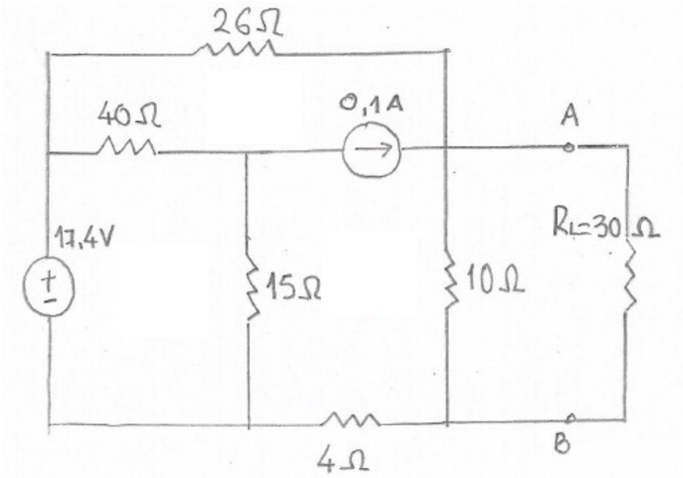


$$v_l = v_{TH} \frac{R_\ell}{R_{TH} + R_\ell} = 9 \text{ V} \qquad i_l = \frac{v_\ell}{R_\ell} = 0{,}75 \text{ A}$$

Στο κύκλωμα του σχήματος, να υπολογιστούν:

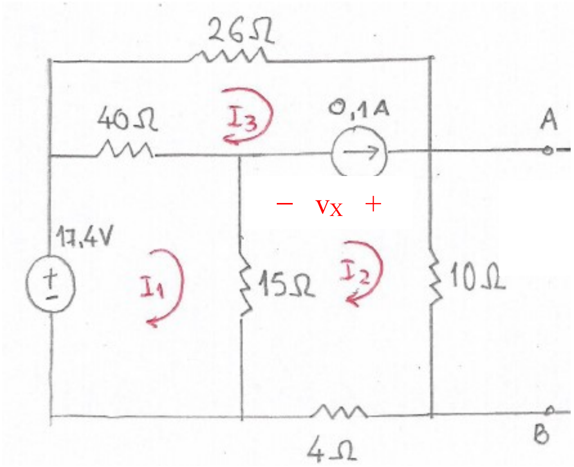
(α) Η τάση και η αντίσταση Thevenin (v_{TH}, R_{TH}) και το ρεύμα και η αντίσταση Norton (i_N, R_N) για τα σημεία Α και Β.

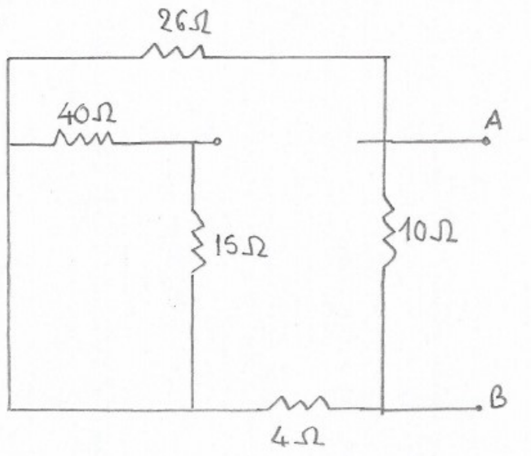
(β) Η τάση v_l και το ρεύμα i_l του φορτίου R_l.



Λύση

Ισοδύναμα κυκλώματα για τον υπολογισμό της τάσης Thevenin v_{TH} (ανοικτοκυκλωμένα Α, Β) και της αντίστασης Thevenin R_{TH} (ανοικτοκυκλωμένα Α, Β, βραχυκυκλωμένες πηγές τάσης και ανοικτοκυκλωμένες πηγές ρεύματος).





$$\begin{vmatrix} 40+15 & -15 & -40 \\ -15 & 15+10+4 & 0 \\ -40 & 0 & 40+26 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 17,4 \\ v_x \\ -v_x \end{vmatrix}$$

$i_2 - i_3 = 0,1$ A

Απαιτείται μόνο ο υπολογισμός του i_2. Προκύπτει $i_2 = 0,5$ A.

Άρα $v_{TH} = v_{AB} = v_{10\Omega} = i_2 \bullet 10 = 5$ V.

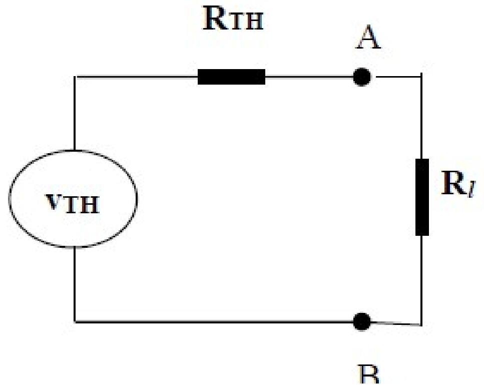
$R_{TH} = R_{AB} = (26 + 4) // 10 = 30 // 10 = 7,5\ \Omega$.

(Οι σε σειρά αντιστάσεις 40 Ω και 15 Ω έχουν βραχυκυκλωθεί και δεν συμμετέχουν στους υπολογισμούς).

$i_N = \dfrac{v_{TH}}{R_{TH}} = 0{,}67$ A

$R_N = R_{TH} = 7{,}5\ \Omega$

Για τον υπολογισμό των v_l, i_l θα χρησιμοποιηθεί το παρακάτω ισοδύναμο (κατά Thevenin) κύκλωμα:



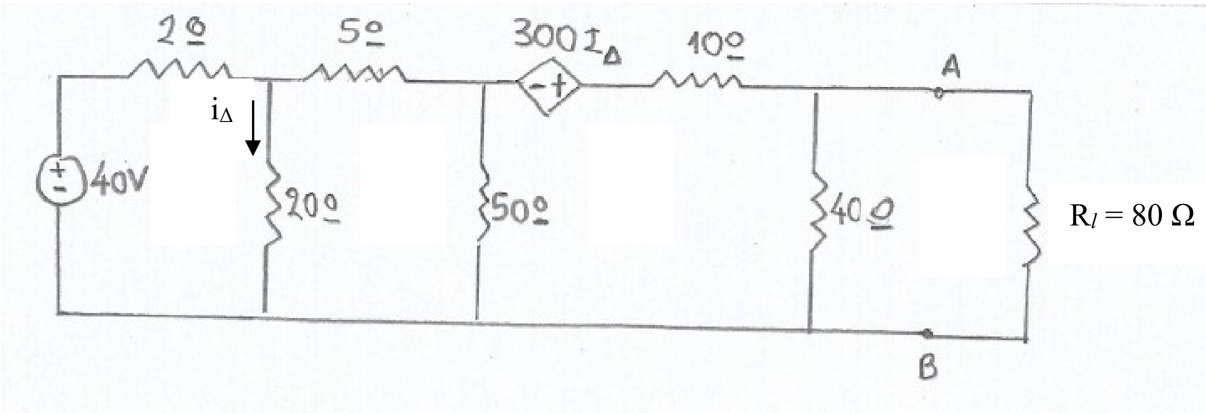
$v_l = v_{TH} \dfrac{R_\ell}{R_{TH} + R_\ell} = 4$ V

$i_l = \dfrac{v_\ell}{R_\ell} = 0{,}13$ A

Στο κύκλωμα του σχήματος, να υπολογιστούν:

(α) Η τάση και η αντίσταση Thevenin (v_{TH}, R_{TH}) και το ρεύμα και η αντίσταση Norton i_N, R_N, για τα σημεία Α και Β.

(β) Η τάση v_l και το ρεύμα i_l του φορτίου R_l.

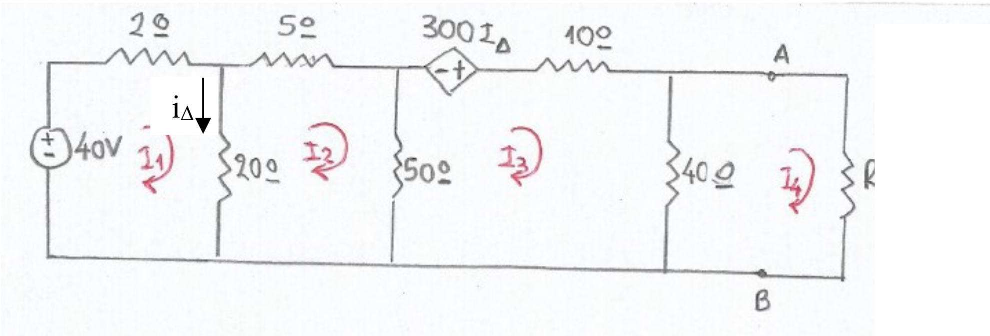


Λύση

-

Η παρουσία της εξαρτημένης πηγής δεν επιτρέπει τον ορισμό ισοδύναμου κυκλώματος για τον υπολογισμό της αντίστασης Thevenin R_{TH}. Για το λόγο αυτό, υπολογίζεται, αρχικά, η τάση Thevenin v_{TH} (από το ισοδύναμο κύκλωμα Thevenin), στη συνέχεια το ρεύμα Norton i_N (από το ισοδύναμο κύκλωμα Norton) και, τέλος, η αντίσταση Thevenin από τον τύπο $R_{TH} = \dfrac{v_{TH}}{i_N}$

Κύκλωμα για τον υπολογισμό της τάσης Thevenin (ανοικτοκύκλωση Α, Β)



$$\begin{vmatrix} 2+20 & -20 & 0 \\ -20 & 20+5+50 & -50 \\ -0 & -50 & 50+10+40 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 40 \\ 0 \\ 300 i_\Delta \end{vmatrix}$$

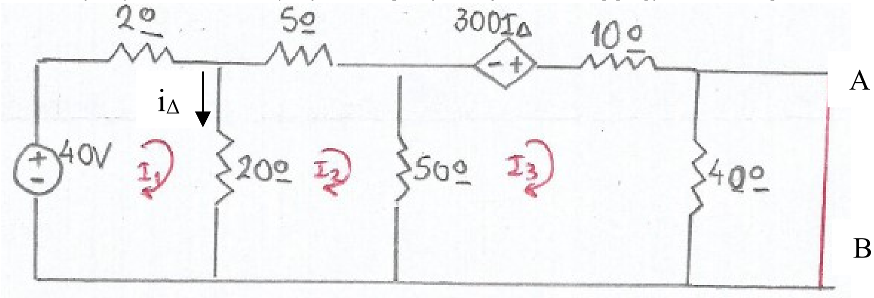
$$22i_1 - 20i_2 + 0i_3 = 40$$
$$-20i_1 + 75i_2 - 50i_3 = 0$$
$$0i_1 - 50i_2 + 100i_3 = 300i_\Delta$$

($i_\Delta = i_1 - i_2$)

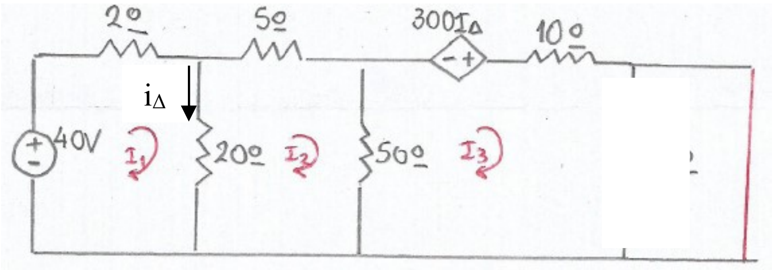
Προκύπτει $i_3 = 7$ A

Άρα, $v_{TH} = v_{AB} = i_3 \cdot 40 = 280$ V

Κύκλωμα για τον υπολογισμό του ρεύματος Norton (βραχυκύκλωση Α, Β)



Δεδομένου ότι η αντίσταση των 40 Ω βραχυκυκλώνεται, το κύκλωμα γίνεται



$$\begin{vmatrix} 2+20 & -20 & 0 \\ -20 & 20+5+50 & -50 \\ 0 & -50 & 50+10 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 40 \\ 0 \\ 300i_\Delta \end{vmatrix}$$

$$22i_1 - 20i_2 + 0i_3 = 40$$
$$-20i_1 + 75i_2 - 50i_3 = 0$$
$$0i_1 - 50i_2 + 60i_3 = 300i_\Delta$$

$(i_\Delta = i_1 - i_2)$

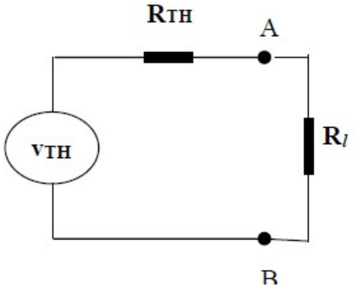
Προκύπτει $i_N = i_3 = 14$ A

Υπολογισμός αντιστάσεων Thevenin και Norton

$$R_{TH} = \frac{v_{TH}}{i_N} = \frac{280}{14} = 20\ \Omega$$

$R_N = R_{TH} = 20\ \Omega$

Κύκλωμα για τον υπολογισμό των v_l, i_l



$$v_l = v_{TH}\frac{R_\ell}{R_{TH} + R_\ell} = 224\ \text{V}$$

$$i_l = \frac{v_\ell}{R_\ell} = 2{,}8\ \text{A}$$

4.4. Θεώρημα μέγιστης μεταφοράς ισχύος

Μπορεί να αποδειχθεί ότι, για **μέγιστη** μεταφορά ηλεκτρικής **ισχύος** από μία πηγή τάσης v_s με εσωτερική αντίσταση R_S προς αντίσταση φορτίου R_l, θα πρέπει να είναι $\mathbf{R_l = R_S}$.

Απόδειξη

Από τη σχέση διαίρεσης τάσης (ενότητα 2.1) προκύπτει ότι $v_l = v_S \dfrac{R_\ell}{R_S + R_\ell}$, άρα

$$p_l = \frac{v_\ell^2}{R_\ell} = \frac{v_S^2 \dfrac{R_\ell^2}{(R_S+R_\ell)^2}}{R_\ell} = v_S^2 \frac{R_\ell}{(R_S+R_\ell)^2} = p_l(R_l)$$

Αναγκαία συνθήκη για τη μεγιστοποίηση της $p_l(R_l)$ είναι να ισχύει $\mathbf{p_l'(R_l) = 0}$.

Παραγωγίζοντας ως προς R_l, προκύπτει

$$p_l'(R_l) = v_S^2 \left(\frac{R_\ell}{(R_S+R_\ell)^2} \right)' = v_S^2 \frac{R_\ell'(R_S+R_\ell)^2 - R_\ell\left((R_S+R_\ell)^2\right)'}{(R_S+R_\ell)^4} =$$

$$= v_S^2 \frac{1.(R_S+R_\ell)^2 - R_\ell 2.(R_S+R_\ell)(R_S+R_\ell)'}{(R_S+R_\ell)^4} =$$

$$= v_S^2 \frac{1.(R_S+R_\ell)^2 - 2R_\ell(R_S+R_\ell).1}{(R_S+R_\ell)^4} =$$

$$= v_S^2 \frac{(R_S+R_\ell)(R_S+R_\ell-2R_\ell)}{(R_S+R_\ell)^4} = v_S^2 \frac{(R_S-R_\ell)}{(R_S+R_\ell)^3}$$

Για να είναι $p_l'(R_l) = 0$, θα πρέπει $R_S - R_l = 0$ δηλαδή $\mathbf{R_S = R_l}$.

Προκειμένου η συνθήκη αυτή να οδηγεί σε μεγιστοποίηση της p_l, θα πρέπει $\mathbf{p_l''(R_l) < 0}$. Πράγματι,

$$p_l''(R_l) = \left[v_S^2 \frac{(R_S-R_\ell)}{(R_S+R_\ell)^3} \right]' = v_S^2 \frac{(R_S-R_\ell)'(R_S+R_\ell)^3 - (R_S-R_\ell)\left((R_S+R_\ell)^3\right)'}{(R_S+R_\ell)^6}$$

$$= v_s^2 \frac{(-1)(R_S+R_\ell)^3 - (R_S-R_\ell)3(R_S+R_\ell)^2(R_S+R_\ell)'}{(R_S+R_\ell)^6}$$

$$= v_S^2 \frac{(-1)(R_S+R_\ell)^3 - (R_S-R_\ell)3(R_S+R_\ell)^2.1}{(R_S+R_\ell)^6}$$

$$= v_S^2 \frac{-(R_S+R_\ell)^3 - 3(R_S-R_\ell)(R_S+R_\ell)^2}{(R_S+R_\ell)^6}$$

Θέτοντας, στην παραπάνω σχέση $R_l = R_S$, προκύπτει ότι

$p_l''(R_l) = v_s^2 \dfrac{-1}{(R_S + R_\ell)^3} < 0$

άρα, όντως, η ισχύς $\mathbf{p_l}$ του φορτίου **μεγιστοποιείται**.

Στην περίπτωση αυτή, είναι $v_l = \dfrac{v_s}{2}$, οπότε

$$p_{l,\mathbf{max}} = \frac{v_\ell^2}{R_\ell} = \frac{v_s^2}{4R_\ell} = \frac{v_s^2}{4R_S} = \frac{p_s}{2}$$

(δεδομένου ότι η ισχύς της πηγής είναι $p_s = \dfrac{v_s^2}{(R_S + R_\ell)} = \dfrac{v_s^2}{2R_S}$).

Το θεώρημα μέγιστης μεταφοράς ισχύος ισχύει και για κύκλωμα με τάση Thevenin v_{TH} και αντίσταση Thevenin R_{TH} συνδεδεμένο με αντίσταση φορτίου R_l. Θα πρέπει $\mathbf{R_l = R_{TH}}$ στην οποία περίπτωση, θα είναι

$$p_{l,\mathbf{max}} = \frac{v_{TH}^2}{4R_{TH}} = \frac{p_{TH}}{2}$$

Οι απαιτήσεις για την τιμή της αντίστασης φορτίου R_l συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα:

Στόχος	**Απαίτηση (ιδανικά κυκλώματα)**	**Απαίτηση (πραγματικά κυκλώματα)**
Στην αντίσταση φορτίου να εμφανίζεται το μέγιστο δυνατό ποσοστό της τάσης της πηγής.	$\dfrac{R_\ell}{R_S} \to \infty$ $(v_l = v_s)$	$\mathbf{R_l >> R_S}$ $(v_l \approx v_s)$
Στην αντίσταση φορτίου να εμφανίζεται το μέγιστο δυνατό ποσοστό του ρεύματος της πηγής.	$\dfrac{R_\ell}{R_S} \to 0$ $(i_l = i_s)$	$\mathbf{R_l << R_S}$ $(i_l \approx i_s)$
Στην αντίσταση φορτίου να πραγματοποιείται μέγιστη μεταφορά ισχύος (θεώρημα μέγιστης μεταφοράς ισχύος).	$\mathbf{R_l = R_S}$ $p_{l,\mathbf{max}} = \dfrac{p_s}{2}$	$\mathbf{R_l = R_S}$ $p_{l,\mathbf{max}} = \dfrac{p_s}{2}$

Πηγή τάσης v_S = 12 V με εσωτερική αντίσταση R_S = 6 Ω συνδέεται (σε σειρά) με αντίσταση φορτίου R_l που λαμβάνει τιμές 2 Ω, 4 Ω, 6 Ω, 8 Ω, 10 Ω και 114 Ω.

(α) Για κάθε τιμή της αντίστασης φορτίου, να υπολογιστεί η ισχύς p_S που παρέχει η πηγή.

(β) Για κάθε τιμή της αντίστασης φορτίου, να υπολογιστούν η τάση, το ρεύμα και η ισχύς (v_l, i_l και p_l) του φορτίου και η ισχύς p_S της πηγής.

Λύση

Με βάση τις σχέσεις

$$v_l = v_S \frac{R_\ell}{R_S + R_\ell}$$

$$i_l = \frac{v_S}{R_S + R_\ell}$$

$$p_l = v_l \cdot i_l$$

$$p_S = v_S \cdot i_S = v_S \cdot i_l$$

προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:

R_l (Ω)	v_l (V)	i_l (A)	i_S (A)	$p_l = v_l \cdot i_l$ (W)	$p_S = v_S \cdot i_S$ (W)	$\frac{p_\ell}{p_S}$
2	3,00	1,50	1,50	4,50	18,00	0,25
4	4,80	1,20	1,20	5,76	14,40	0,40
6	6,00	1,00	1,00	**6,00**	12,00	0,50
8	6,86	0,86	0,86	5,92	10,29	0,58
10	7,50	0,75	0,75	5,63	9,00	0,63
114	11,40	0,10	0,10	1,14	1,20	0,95

Σχόλια

- Ο πίνακας καταδεικνύει ότι η τάση φορτίου v_l μεγιστοποιείται όταν $R_l >> R_S$, το ρεύμα φορτίου i_l μεγιστοποιείται όταν $R_l << R_S$, ενώ η ισχύς του φορτίου p_l μεγιστοποιείται όταν $R_l = R_S$.
- Η **μέγιστη τιμή** της ισχύος του φορτίου $\mathbf{p_l}$ (που προκύπτει όταν $R_l = R_S$) αντιστοιχεί στο **50%** της συνολικής ισχύος που παρέχει η πηγή.
- Αν και η ισχύς του φορτίου μειώνεται για $R_l > R_S$, το **ποσοστό** της ισχύος που μεταφέρεται στο φορτίο συνεχίζει να αυξάνεται.

Παράδειγμα

Πηγή τάσης v_S = 100 V με εσωτερική αντίσταση R_S = 300 Ω συνδέεται (σε σειρά) με αντίσταση φορτίου R_l που λαμβάνει τιμές 0, 100, 200, … 1000 Ω. Να συμπληρωθεί ο πίνακας τιμών και να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των v_l, i_l, p_l συναρτήσει της αντίστασης φορτίου R_l.

R_l	0 Ω	100 Ω	…	1000 Ω
v_l	…	…	…	…
i_l	…	…	…	…
p_l	..	…	…	…

Λύση

Με βάση τις σχέσεις

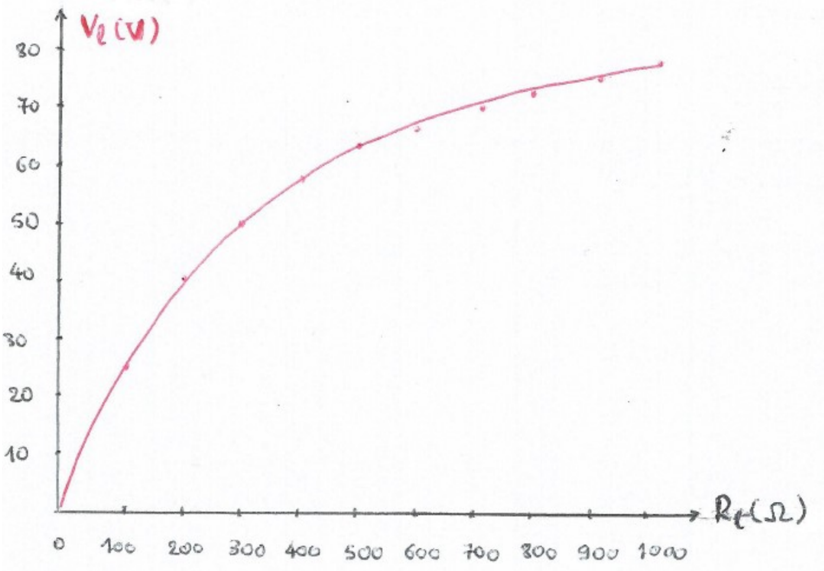
$$v_l = v_S \frac{R_\ell}{R_S + R_\ell}$$

$$i_l = \frac{v_S}{R_S + R_\ell}$$

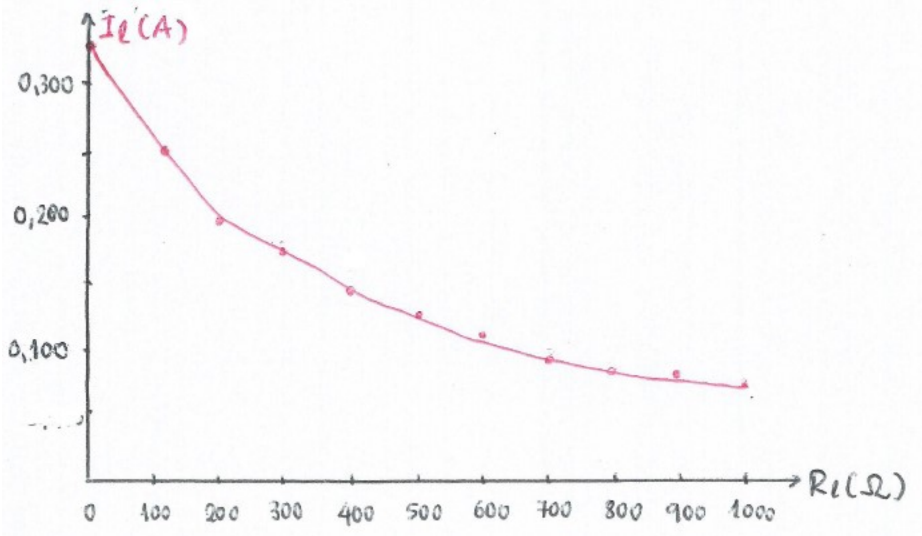
$$p_l = v_l \cdot i_l$$

προκύπτει ο πίνακας που ακολουθεί (με βάση τον οποίο θα σχεδιαστεί και η ζητούμενη γραφική παράσταση):

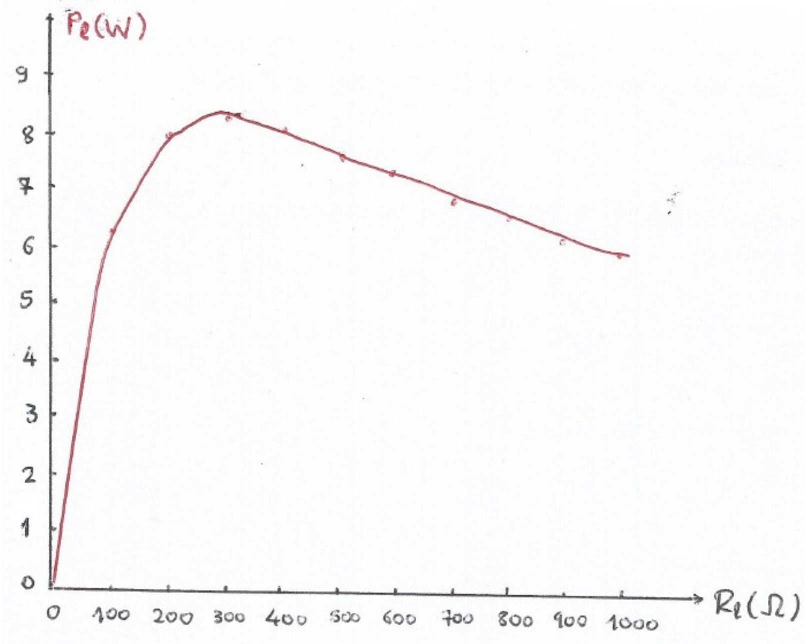
R_l (Ω)	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
v_l (Ω)	0	25,0	40,0	50,0	57,1	62,5	66,7	70,0	72,7	75	76,9
i_l (A)	0,330	0,250	0,200	0,167	0,143	0,125	0,111	0,100	0,091	0,083	0,077
p_l (W)	0	6,25	8,00	8,33	8,17	7,81	7,41	7,00	6,62	6,23	5,97



V_ℓ (V)
80
70
60
50
40
30
20
10
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000
R_ℓ (Ω)



I_ℓ (A)
0,300
0,200
0,100
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000
R_ℓ (Ω)



P_ℓ (W)
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000
R_ℓ (Ω)

Παράδειγμα

Κύκλωμα τροφοδοτείται από πηγή τάσης v_S με εσωτερική αντίσταση $R_S = 80$ ενώ το φορτίο R_l αποτελείται από την παράλληλη συνδεσμολογία δύο αντιστάσεων $R_1 = R$ και $R_2 = 4R$ (όπου R αντίσταση που πρέπει να προσδιοριστεί).

α) Να προσδιοριστεί η τιμή των αντιστάσεων R_1, R_2 ώστε να επιτυγχάνεται μέγιστη μεταφορά ισχύος από την πηγή προς το φορτίο.

β) Αν η τάση της πηγής έχει τιμή $v_S = 320$ V, να υπολογιστεί η (συνολική) ισχύς P_S της πηγής και η ισχύς P_l που μεταφέρεται στο φορτίο R_l.

Λύση

(α) Θα πρέπει $R_l = R_1//R_2 = R_S = 80$ (Ω).

Όμως $R_1//R_2 = \dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2} = \dfrac{R \bullet 4R}{R + 4R} = \dfrac{4}{5}R$

Άρα θα πρέπει $\dfrac{4}{5}R = 80$ (Ω) $\Rightarrow$ $R = 100$ (Ω)

Επομένως

$R_1 = R = 100$ (Ω)

$R_2 = 4R = 400$ (Ω)

(β) $i_S = \dfrac{v_S}{R_S + R_\ell} = \dfrac{320}{80 + 80} = 2$ A

$P_S = v_S \bullet i_S = 320 \bullet 2 = 640$ W

(Εναλλακτικά: $P_S = i_S^2(R_S + R_l) = 2^2 \bullet (80+80) = 640$ W)

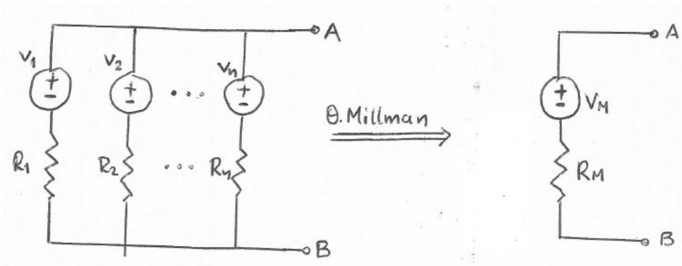
$P_l = i_S^2 R_l = 2^2 \bullet 80 = 320 \text{ W} = \dfrac{P_S}{2}$

Σχόλιο: Το αποτέλεσμα του ερωτήματος (β) καταδεικνύει το γεγονός ότι **μέγιστη** μεταφορά ισχύος σημαίνει μεταφορά, προς το φορτίο, της **μισής** ισχύος της πηγής.

4.5. Θεώρημα Millman

Το θεώρημα Millman επιτρέπει την αντικατάσταση παράλληλων πηγών τάσης (καθεμιά με τη δική της αντίσταση) με μία (1) πηγή τάσης και μία (1) αντίσταση σε σειρά.

Με αναφορά στο σχήμα που ακολουθεί:



$$v_M = \frac{v_1 \frac{1}{R_1} + v_2 \frac{1}{R_2} + \ldots + v_n \frac{1}{R_n}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}}$$

$$R_M = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}}$$

Σχόλια

- Σε περίπτωση που κάποια πηγή έχει **αντίθετη** πολικότητα, ο αντίστοιχος **όρος** στον αριθμητή της σχέσης για τη **v_M** έχει πρόσημο "**–**". Επισημαίνεται ότι η πολικότητα των πηγών **δεν** επηρεάζει τη σχέση για την R_M.
- Σε περίπτωση που κάποιος κλάδος **δεν** έχει **πηγή** (αλλά μόνο αντίσταση) ο αντίστοιχος όρος στη σχέση για τη **v_M** **μηδενίζεται**. Η σχέση για την R_M **δεν** επηρεάζεται.
- Σε περίπτωση που κάποιος κλάδος **δεν** έχει **αντίσταση**, το θεώρημα **δεν** μπορεί να εφαρμοστεί διότι ο αντίστοιχος όρος στις σχέση για τη **v_M** και την R_M **απειρίζεται**.

Παράδειγμα

Να υπολογιστούν η ισοδύναμη πηγή τάσης v_M και η ισοδύναμη αντίσταση R_M αν

$v_1 = 8$ V , $R_1 = 2$ Ω,

$v_2 = -9$ V , $R_2 = 3$ Ω,

$v_3 = 12$ V , $R_3 = 6$ Ω

Λύση

$$v_M = \frac{8 \bullet \frac{1}{2} - 9 \bullet \frac{1}{3} + 12 \bullet \frac{1}{6}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{6}} = 3 \text{ V}$$

$$R_M = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = 1\ \Omega$$

Παραπομπές κεφαλαίου

Γ.Ε. Χατζαράκης. Ηλεκτρικά Κυκλώματα, Εκδ. Τζιόλα & Υιοί, 2015.
Ενότητες: 4.1, 4.2, 4.4, 4.5.
Εφαρμογές (λυμένες ασκήσεις, ενότητα 4.8): 1^{η}, 2^{η}, 3^{η}, 4^{η}.